Й. НИКОЛОВ Д. СТАНКОВ С. ПЪРВУЛОВ

УВОД

В

СПЕЦИАЛНОСТТА

ШУМЕН

2007

Тази книга е предназначена за студентите от първи курс на специалностите "Математика" и "Математика и информатика" във Факултета по математика и информатика на Шуменския университет "Епископ Константин Преславски". Съдържанието й (без Глава I) е допълнение и разширение на книгата "Математика за кандидат-студенти" от същите автори. Допълнението и разширението се осъществяват чрез системи от задачи. По тази причина двете книги образуват едно органично цяло.

Книгата може да се използва от всички кандидат-студенти за специалностите с приемен изпит по математика, както и от студентите от горните курсове на специалностите "Математика и информатика", "Математика" и "Математика и физика" по време на практическата им подготовка в училище. Тя ще бъде полезна и на учителите по математика, както за подготовката им за класни и извънкласни занятия с учениците, така и при подготовката им за придобиването на професионално-квалификационни степени.

Научен редактор: доц. Любен Борисов Портев
Рецензенти: доц. д-р Никола Тодоров Петров
доц. д-р Христо Григоров Христов

9712 Шумен, ул. "Университетска" № 115
тел./факс: (054) 830-316
e-mail: mariana@shu-bg.net

ISBN: 978-954-577-407-2

СЪДЪРЖАНИЕ

ВЪВЕДЕНИЕ

Тази книга е предназначена за всички студенти от първи курс на специалностите “Математика” и “Математика и информатика”, изучаващи дисциплината “Увод в специалността”. Тя може да се разглежда и като Сборник от задачи и като Ръководство за решаване на задачи, поради което работата с нея ще разшири и задълбочи математическите идеи и методите за решаване на задачи, разгледани в “Математика за кандидат-студенти”, написана от същите автори.

Систематизирането на голям брой задачи от средно и високо ниво на трудност от основните раздели на математиката, изучавана в средното училище, прави книгата особено полезна и за всички млади хора, които желаят да положат успешно кандидатстудентските изпити по математика.

Книгата ще бъде особено полезна на учителите по математика и на учениците в класните и извънкласните форми на работа по математика в училище, както и на студентите от горните курсове на специалностите “Математика”, “Математика и информатика” и “Физика и математика” по време на стажантската им практика в училище.

Книгата се състои от шест глави: Теория на множествата, елементи на математическата логика; Алгебра и тригонометрия; Геометрия; Функции; Упътвания и Отговори.

В Глава I се разглеждат основни понятия и твърдения от теория на множествата и математическата логика, които се илюстрират с подходящо подбрани задачи-образци. Глава I служи за разширяване на математическия кръгозор на студентите от I курс и подготовката им за усвояване на основни дисциплини като “Висша алгебра”, “Математически анализ” и други. Глави II, III и IV съдържат системи от задачи, с които се допълват и разширяват възможностите за усвояване на основни раздели от математиката на по високо ниво, заложени в Глави I, II и III на “Математика за кандидат-студенти”. Затова препоръчваме на студентите от ФМИ и ФПН да използват едновременно двете книги. Те са съобразени и с тенденциите в провеждането на кандидатстудентските изпити по математика през последните години в България. Препоръчваме на читателите да проучат внимателно упътванията към решенията на задачите, независимо от това дали са постигнали успех в самостоятелното им решаване, даже и да са получили верния отговор. Така те ще се предпазят от заблуждения, ще усвоят нови идеи и методи за решаване на задачи.

Разгледаните в книгата задачи и методите за тяхното решаване ще спомогнат за формиране и на математически стил на мислене, който е необходим не само на кандидат-студентите за изпита по математика, и на студентите от първи курс за изпита по "Увод в специалността", но и в много сфери на реалния живот.

С [М] е означена книгата „Математика за кандидат-студенти". Другите използвани символи и означения са същите както в [М].

Съдържанието на книгата е разработено както следва:

Глава III § 9-15; IV § 4 – Й.Николов

Глава IV § 1 – 3 – Д.Станков

Глава I, II, III § 1 – 8 – С.Първулов

Глави V и VI са разработени съвместно от авторите.

Авторите считат за свое приятно задължение да изкажат искрената си благодарност на рецензентите доц.д-р Н.Петров и доц.д-р Хр.Григоров за задълбочените рецензии, както и на редактора доц. Л.Портев за направените корекции, които допринесоха за подобряване качествата на книгата.

Изказваме нашата искрена благодарност и на гл.специалист I степен, маг. Снежана Стойчева за отличната предпечатна подготовка на книгата, без помощта на която отпечатването на книгата щеше да бъде невъзможно в желания срок.

18.01.2007 г. От авторите

гр. Шумен

Глава I. ТЕОРИЯ НА МНОЖЕСТВАТА. ЕЛЕМЕНТИ НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ЛОГИКА

§1. Множества, релации и операции с тях

I. Основни понятия и теореми

Понятието множество е *първично понятие* в математиката и за това не се определя посредством други понятия. Представа за него придобиваме чрез примери. Така може да се говори за множеството от ученици от даден клас, за множеството от корените на дадено уравнение и др.

Множествата се означават с главните латински букви A, B, C, ... За някои числови множества се използват постоянни означения:

N - множеството на естествените числа;

Z - множеството на целите числа;

Q - множеството на рационалните числа;

R - множеството на реалните числа.

Обектите, от които се състои дадено множество, се наричат негови *елементи*. Например, числото 5 е елемент от N, но $\frac{1}{2}$ не е негов елемент. Елементите на едно множество се означават с малки латински букви a, b, c, ...

Ако a е елемент на множеството A се означава с $a \in A$ и се чете "a принадлежи на A". Ако a не е елемент на A се записва $a \overline{\in} A$ и се чете "a не принадлежи на A".

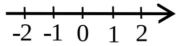
Определение 1. Множеството, което няма елементи се нарича *празно множество* и се означава с $\varnothing$. Например, множеството от целите корени на уравнението $2x = 1$ е празното множество.

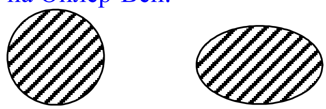
Ако едно множество е зададено чрез непосредствено записване на елементите му се казва, че множеството е зададено *конструктивно*. Например, ако множеството се състои от елементите 1, 2, 3, 4, 5, то се записва така: $\{1;2;3;4;5\}$.

Едно множество (крайно или безкрайно) може да бъде зададено чрез посочване на *характеристично свойство*, т.е. такова свойство което притежават всички елементи от множеството и само те.

Множество, определено с характеристичното свойство P, се означава с $A = \{x / P(x)\}$ и се чете "множеството от всички x, които удовлетворяват свойството $P(x)$". Когато едно множество е зададено чрез характеристично свойство се казва, че то е зададено *дескриптивно*. Така например, чрез $A = \{x / x < 0\}$ е зададено множеството на отрицателните числа.

Едно и също множество може да бъде зададено чрез различни характеристични свойства. Например, множеството на целите числа по-големи от -3 и по-малки от 3 може да бъде зададено по следните начини $\{x \in Z / |x| < 3\}$ или $\{x \in Z / x^2 < 9\}$ или $\{x \in Z / -3 < x < 3\}$.

Освен конструктивно и дескриптивно множествата се задават и графично. Например множеството $\{x \in Z / |x| < 3\}$ се изобразява върху числовата ос по следния начин  . За по-голяма нагледност и общност множествата се изобразяват с вътрешност на кръгове или други затворени области в равнината (черт.1), наречени диаграми на Ойлер-Вен.



Черт.1

Определение 2. Множествата A и B са равни, ако се състоят от едни и същи елементи. Записва се $A = B$.

Теорема 1. Релацията равенство на множества притежава следните свойства:

1. *Рефлексивност*. За всяко множество A е вярно $A = A$.

2. *Симетричност*. За всеки две множества A и B, ако $A = B$, то и $B = A$.

3. *Транзитивност*. За всеки три множества A, B и C, ако $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

Определение 3. Множеството A се нарича подмножество на множеството B (или A се включва в B), ако всеки елемент на A е елемент и на B. Записва се $A \subset B$.

От определение 3 следва, че A не е подмножество на B ($A \not\subset B$), ако съществува поне един елемент на A, който не е елемент на B.

Теорема 2. Релацията включване на множества притежава следните свойства:

1. *Рефлексивност*. За всяко множество A е вярно $A \subset A$.

2. *Антисиметричност*. За всеки две множества A и B е изпълнено, ако $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

3. *Транзитивност*. За всеки три множества A, B и C е изпълнено, ако $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

4. За всяко множество A е изпълнено $\varnothing \subset A$.

Определение 4. Сечение на множествата A и B се нарича множество, което се състои само от елементи, които принадлежат едновременно на A и B. Означава се $A \cap B$.

От определение 4 следва, че $A \cap B = \{x / x \in A \ \text{и}\ x \in B\}$, т.е. $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B$.

Теорема 3. Операцията сечение на множества притежава следните свойства:

1. *Комутативност*. За всеки две множества A и B е вярно $A \cap B = B \cap A$.

2. *Асоциативност*. За всеки три множества A, B и C е вярно $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. За всяко множество A е изпълнено $A \cap A = A$ и $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Определение 5. Обединение на множествата A и B се нарича множество, което се състои само от елементи, които принадлежат на поне едно от множествата A и B. Означава се $A \cup B$.

От определение 5 следва, че $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ **или** $x \in B$.

Теорема 4. Операцията обединение на множества притежава следните свойства:

1. *Комутативност*. За всеки две множества A и B е вярно $A \cup B = B \cup A$.

2. *Асоциативност*. За всеки три множества A, B и C е вярно $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

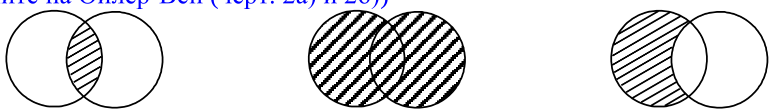
3. За всяко множество A е изпълнено $A \cup \varnothing = A$ и $A \cup A = A$.

4. *Дистрибутивност*. За всеки три множества A, B и C е изпълнено:

4.1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

4.2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Графично сечението и обединението на две множества A и B се изобразява с диаграмите на Ойлер-Вен (черт. 2а) и 2б))



а) б) в)

Черт.2

Определение 6. Разлика на множествата A и B се нарича множество,което се състои само от елементи на A, които не принадлежат на B. Означава се с $A \setminus B$.

От определение 6 следва, че $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ **и** $x \overline{\in} B$.

Графично разликата на A и B е показано на черт. 2в).

Операцията разлика на множества притежава следните свойства:

1. $A \setminus A = \varnothing$; 2. $A \setminus \varnothing = A$; 3. $\varnothing \setminus A = \varnothing$

4. Ако $A \subset B$, то $A \setminus B = \varnothing$; 5. $A \setminus B \subset A$.

II. Задачи образци.

Задача 1. Дадени са множествата: A - множеството от четириъгълници, B - множеството от успоредници, C - множеството от правоъгълници, D - множеството от ромбове, E - множеството от квадратите. Подредете във верига от включвания буквите с които са означени множествата:

а) E, A, B, C; б) E, A, D, B.

Задача 2. Да се сравнят по отношение на релацията включване и равенство следните множества:

а) $A = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ и $B = \{x \in Z \,/\, 0 \le x < 6\}$;

б) $C = \{x \in R \,/\, (x-2)(x-3) = 0\}$ и $D = \{x \in N \,/\, 1 < x < 4\}$;

в) $E = \{x \in R \,/\, (x-1)^2 + x^2 > 0\}$ и $F = \{x \in R \,/\, |x| > 0\}$.

Задача 3. Дадени са множествата: A - множеството от всички прости числа по-малки от 20 и B - множеството от всички естествени числа делители на 24. Намерете $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Задача 4. Ако L е множеството от равностранните триъгълници, а K е множеството от равнобедрените триъгълници, кое от следните твърдения е вярно:

а) $L \subset K$; б) $K \subset L$; в) $L \cap K = L$; г) $L \cup K = K$; д) $L \cup K = L$.

Задача 5. От 26 студенти спортисти, които са плувци или скиори или футболисти, плувците са 9, скиорите - 11, а футболистите - 13. Ако никой от футболистите не е плувец, но 4 от плувците са скиори, колко от скиорите са футболисти?

Задача 6. Дадени са множествата: $A=\{x\in R/x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty)\}$, $B=\{x\in R/x\in(-\infty,0]\cup[5,+\infty)\}$; $C=\{x\in R/x\in[0,5]\}$ и $D=\{x\in R/x\in[-3,7]\}$. Да се намери:

а) $A\cup B$; б) $A\cap B\cap D$; в) $B\cap C$.

§2. Елементи на математическата логика

I. Основни понятия и теореми

Определение 1. Изречение, с което се изразява твърдение, за което може да се каже дали е вярно или не, се нарича *съждение*.

Определение 2. Съждение, което не е съставено от други съждения, се нарича просто (елементарно) съждение. Съждение, което е съставено от поне две съждения, се нарича сложно (съставно).

Съжденията се означават с латинските букви p, q, r, ...

Ако едно съждение p е вярно ще казваме, че то има вярностна стойност 1 и ще записваме $v(p)=1$. Ако съждението p е невярно ще казваме, че то има вярностна стойност 0 и ще записваме $v(p)=0$.

Определение 3. *Отрицание* на съждението p се нарича такова съждение,което е вярно само тогава, когато p е невярно. Означава се с $\overline{p}$.

От определение 3 следва, че $v(\overline{p})=0$ само тогава, когато $v(p)=1$.

Определение 4. *Конюнкция* на съжденията p и q се нарича такова съждение, което е вярно само тогава, когато са верни и двете съждения p и q. Означава се $p\wedge q$.

Определение 5. *Дизюнкция* на съжденията p и q се нарича такова съждение, което е вярно само когато е вярно поне едно от двете съждения p и q. Означава се $p\vee q$.

Определение 6. *Изключваща дизюнкция* на съжденията p и q се нарича такова съждение, което е вярно само когато едното съждение е вярно, а другото не. Означава се $p\dot{\vee}q$.

Определение 7. *Импликация* на съжденията p и q се нарича такова съждение, което е невярно само когато p е вярно, а q е невярно. Означава се $p\to q$.

Определение 8. *Еквиваленция* на съжденията p и q се нарича такова съждение, което е вярно само когато и двете съждения са едновременно верни или неверни. Означава се $p\leftrightarrow q$.

Операциите, чрез които от две съждения посредством определенията от $1\div 8$ се получава трето съждение се наричат логически операции.

По-нататък 1 и 0 ще наричаме съждителни константи, а произволни съждения p, q, r, ... съждителни променливи. Съждителните променливи приемат само две стойности: 1 и 0.

Определение 9. Всяка крайна съвкупност от съждителни променливи и константи, свързани в определен ред с логически операции, се нарича съждителен израз.

Всяка съждителна константа и съждителна променлива е съждителен израз.

Определение 10. Съждителните изрази P и Q са равносилни (еквивалентни), ако имат равни верностни стойности за всеки набор от верностни стойности на съждителните променливи в тях. Означава се $P \Leftrightarrow Q$.

В зависимост от верностните стойности, които приемат, съждителните изрази се делят на:

1) общовалидни (тъждествено верни) – когато верностната им стойност е винаги равна на 1, т.е. съждителният израз P е общовалиден, ако $P \Leftrightarrow 1$.

2) неизпълними (тъждествено неверни) – когато верностната им стойност е винаги равна на 0, т.е. ако $P \Leftrightarrow 0$.

3) неутрални (изпълними) – когато не са случай 1) или 2).

Релацията еквивалентност (равносилност) на съждителни изрази притежава следните свойства:

1. За всеки съждителен израз P е вярно $P \Leftrightarrow P$.
2. За всеки два съждителни израза P и Q, ако $P \Leftrightarrow Q$, то и $Q \Leftrightarrow P$.
3. За всеки три съждителни израза P, Q и R, ако $P \Leftrightarrow Q$ и $Q \Leftrightarrow R$, то $P \Leftrightarrow R$.

Скобите в един съждителен израз определят реда на изпълнение на операциите. За да се намали броя на скобите при записване на съждителния израз се използва следния ред на извършване на логическите операции:

1. Знакът за операцията *отрицание* свързва по-силно от знаците на останалите операции, т.е. ще записваме $\overline{p \vee q} \wedge r$ вместо $\left(\overline{p \vee q}\right) \wedge r$.

2. Знакът за *конюнкция* свързва по-силно от знаците за дизюнкция, импликация и еквиваленция, т.е. ще записваме $p \wedge r \vee q \wedge r$ вместо $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$; $p \wedge q \rightarrow r$ вместо $(p \wedge q) \rightarrow r$; $p \wedge q \leftrightarrow r \wedge S$ вместо $(p \wedge q) \leftrightarrow (r \wedge S)$.

3. Знакът за *дизюнкция* свързва по-силно от знаците за импликация и еквиваленция.

4. Знакът за *импликация* свързва по-силно от знака за еквиваленция.

Както при преобразуване на алгебрични изрази се използват свойствата на аритметичните операции, така и при преобразуване на съждителни изрази се използват свойствата на логическите операции, които представляват законите на съждителното смятане.

Ще приведем някои от по-важните от тях.

1. $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ (закон за двойното отрицание);
2. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (комутативност);
3. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (комутативност);
4. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (асоциативност);
5. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ (асоциативност);
6. $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge r \vee q \wedge r$ (дистрибутивност);
7. $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ (дистрибутивност);

8. $p \wedge p \Leftrightarrow p$;

9. $p \vee p \Leftrightarrow p$;

10. $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$;

11. $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$;

12. $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$;

13. $p \vee 0 \Leftrightarrow p$;

14. $p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow 0$ (закон за противоречието);

15. $p \vee \overline{p} \Leftrightarrow 1$ (закон за изключеното трето);

16. $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$ (закон за поглъщането);

17. $(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$ (закон за поглъщането);

18. $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ (закон на де Морган);

19. $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ (закон на де Морган);

20. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$;

21. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{q} \rightarrow \overline{p}$ (закон за контрапозицията);

22. $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$;

23. $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$.

Определение 11. Ще казваме, че от съждителния израз P (логически) *следва* съждителният израз Q, ако за всеки набор от стойности на съждителните променливи, за които от P се получава вярно съждение, то и от Q също се получава вярно съждение.

Когато се доказва, че два съждителни израза са еквивалентни, в зависимост от вида им се постъпва по един от следните начини:

1) ако двата израза имат по-прост вид, сравняват се верностните им стойности;

2) ако единият израз е сравнително по-прост от другия, то чрез еквивалентни преобразувания по-сложния се свежда до по-простия;

3) ако и двата израза имат по-сложен вид, то всеки един от тях се преобразува поотделно до получаване на едни и същи израз, еквивалентен на тях;

4) ако и в двата израза участва едно и също сложно съждение, то това съждение се заменя с нова съждителна променлива, след което двата израза придобиват по-прост вид.

II. Задачи образци

Задача 1. Да се опростят изразите:

а) $\overline{\overline{p} \vee q}$; б) $\overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$; в) $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}$; г) $\overline{\overline{p}} \wedge \overline{\overline{p} \vee q}$.

Задача 2. Да се определи кои от следните двойки съждителни изрази са еквивалентни:

а) $p \wedge \overline{p}$ и $\overline{q \vee \overline{q}}$; б) $p \wedge \overline{p}$ и $\overline{q \wedge \overline{q}}$; в) $p \rightarrow q$ и $\overline{q} \wedge p \rightarrow \overline{p}$;

г) $p \wedge q \rightarrow r$ и $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

Задача 3. Да се провери кои от следните съждителни изрази са общовалидни и кои не са:

а) $(p \to q) \wedge \overline{q} \to \overline{q}$;   б) $(p \to q) \wedge q \to p$;   в) $(p \to q) \wedge q \to q$.

Задача 4. Да се докаже, че изразът $\overline{p \to p \vee q}$ е неизпълним.

§3. Теорема. Видове теореми. Необходими и достатъчни условия

I. Основни понятия и теореми

Всяка математическа теория представлява множество от твърдения, описващи изучавана структура, при което някои твърдения се приемат за изходни (аксиоми) така, че всички останали твърдения (теореми) логически да следват от тях.

Определение 1. Всяко съждение, чиято истинност трябва да се докаже се нарича *теорема*.

Математическите твърдения най-често се изразяват в импликативна форма $p \to q$. Ако $p \to q$ е теорема, то от p логически следва q, т.е. $p \Rightarrow q$. Съждението p се нарича условие, а q - заключение на теоремата. Условието и заключението на една теорема може да не са елементарни съждения. Най-често в такива случаи условието p е конюнкция на две или повече съждения. В някои случаи условието на дадена теорема е дизюнкция на две или повече съждения, същото се отнася за заключението.

С импликацията $p \to q$ (1) са свързани още три импликации:

(2) $q \to p$ - обратно твърдение;

(3) $\overline{p} \to \overline{q}$ - противоположно твърдение;

(4) $\overline{q} \to \overline{p}$ - контрапозитивно твърдение.

Съгласно закона за контрапозицията (21), съжденията (1) и (4), както и (2) и (3) са равносилни, т.е. $p \to q \Leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$ и $q \to p \Leftrightarrow \overline{p} \to \overline{q}$.

Следователно, ако $p \to q$ е теорема в някаква теория, т.е. $p \Rightarrow q$, то и $\overline{q} \to \overline{p}$ е теорема в тази теория. Същото се отнася за другата двойка твърдения.

Ако импликацията $p \to q$ е теорема, т.е. $p \Rightarrow q$, то се казва, че p е достатъчно условие за q, а q е необходимо условие за p.

Ако $p \Rightarrow q$, но $q \nRightarrow p$, то p е достатъчно, но не е необходимо условие за q, а q е необходимо, но не е необходимо условие за p.

Ако $p \Rightarrow q$ и $q \Rightarrow p$, т.е. $p \Leftrightarrow q$ се казва, че p е необходимо и достатъчно условие за q, а също, че q е необходимо и достатъчно условие за p.

II. Задачи образци

Задача 1. Определете условието и заключението на следните теореми:

а) Ако две цели числа се делят на 3, то сборът им се дели на 3.

б) Ако произведението на две числа е нула, то поне едно от тях е равно на нула.

в) Ако един многоъгълник е правилен, то около него може да се опише окръжност.

г) Ако ъглополовящите на вътрешните ъгли на един многоъгълник се пресичат в една точка, то в него може да се впише окръжност.

Задача 2. Формулирайте обратните, противоположните и контрапозитивните твърдения на следните теореми и покажете кои от тях са теореми и кои не:

а) Нека a и b са естествени числа. Ако $a.b$ се дели на 3 и a не се дели на 3, то b се дели на 3.

б) Нека a и b са естествени числа. Ако a се дели на 3 или b се дели на 3, то $a.b$ се дели на 3.

в) Ако четириъгълникът $ABCD$ е ромб, то в $ABCD$ може да се впише окръжност.

Задача 3. Нека a, b и c са цели числа. В следващите твърдения заменете многоточието с думите "необходимо", или "достатъчно", или "необходимо и достатъчно" така, че те да бъдат теореми:

а) за да бъде числото $a+b$ четно $\dots$ числата a и b да са нечетни;

б) за да бъде изпълнено $a^3 > 8$ $\dots$ е числото $a > 2$;

в) за да бъде числото $a = 0$ $\dots$ е $a.b = 0$.

Задача 4. Нека x и y са реални числа. В следващите твърдения заменете многоточието с думите "необходимо", или "достатъчно", или "необходимо и достатъчно" така, че те да бъдат теореми:

а) за да бъде изпълнено $x > 0$ и $y > 0$ $\dots$ е $x.y > 0$;

б) за да бъде изпълнено $x > 0$ и $y > 0$ $\dots$ е $x - y > 0$ и $x + y > 0$;

в) за да бъде изпълнено $x < 0$ и $y < 0$ $\dots$ е $x.y > 0$ и $x + y < 0$;

г) за да бъде изпълнено $x < 0 < y$ $\dots$ е $x.y < 0$;

д) за да бъде изпълнено $x.y < 0$ $\dots$ е числата x и y да имат различни знаци;

е) за да бъде изпълнено $x^2 < y^2$ $\dots$ е $x < y$.

§4. Алгебрични изрази. Тъждествено равни алгебрични изрази

I. Основни понятия и теореми

Определение 1. Съвкупност от числа и букви, означаващи променливи над които са извършени определен брой операции (събиране, изваждане, умножение, деление, степенуване и коренуване в определен ред) се нарича *алгебричен израз*.

Определение 2. Алгебричен израз, в който променливите не са подложени на операцията коренуване се нарича *рационален*, в противен случай изразът се нарича *ирационален*.

Определение 3. Буквен набор на даден алгебричен израз се нарича множеството от всички различни букви, участващи в този израз, взети в определен ред.

Ако в буквен набор заместим всяка буква с дадено реално число, то получаваме числов набор, съответстващ на дадения буквен набор.

Определение 4. Съответстващ числов набор на буквения набор на даден алгебричен израз се нарича допустим за този израз, ако има смисъл числовият израз, който се получава от дадения алгебричен израз, когато всяка буква се замества със съответстващото й число от дадения числов набор.

Определение 5. Множеството от всички допустими числови набори, съответстващи на буквения набор на даден алгебричен израз се нарича множество от допустими стойности (МДС) на дадения алгебричен израз или дефиниционна област (множество).

Определение 6. Множеството от допустими стойности (МДС) на алгебричните изрази A_1, A_2, ..., A_n се нарича сечението на множествата от допустими стойности на алгебричните изрази A_1, A_2, ..., A_n.

Определение 7. Два алгебрични израза A и B се наричат тъждествено равни, ако:

1. дефиниционните им множества съвпадат;
2. приемат равни стойности за всеки допустим числов набор.

Определение 8. Ако A и B са тъждествено равни алгебрични израза, т.е. $A=B$, то равенството се нарича тъждество.

Теорема 1, Релацията равенство в множеството на алгебричните изрази притежава следните свойства:

1. За всяко A е изпълнено $A=A$ (рефлективност).
2. Ако $A=B$, то $B=A$ (симетричност).
3. Ако $A=B$ и $B=C$, то $A=C$.

Определение 9. Заместването на един алгебричен израз с тъждествено равен на него алгебричен израз, се нарича тъждествено преобразуване на алгебрични изрази.

При доказване на тъждества, обикновено се използва един от следните начини:

1. Ако единият израз е по-сложен от другия, то се преобразува тъждествено по-сложния израз докато се получи по-простия.
2. Ако и двата израза са сложни, то се преобразуват поотделно двата израза докато се получи един и същи израз.
3. Образува се разликата на двата израза и тя се преобразува докато се получи нула.

Ако трябва да се докаже дадено тъждество при условие, че буквите участващи в алгебричните изрази удовлетворяват допълнителни условия, то в такъв случай говорим за условно тъждество.

При доказване на условни тъждества обикновено се използва един от следните начини:

1. в процеса на доказателството на $A=B$ последователно се използват допълнителните условия;
2. предварително се преобразуват допълнителните условия, в резултат на което се получават други по-подходящи условия , които се използват в процеса на доказателството на $A=B$.
3. последователно се преобразуват допълнителните условия докато се установи верността на $A=B$.

При тъждествени преобразувания на алгебрични изрази често се използват следните формули за съкратено умножение (основни тъждества):

1. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

2. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$;

3. $(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4$;

4. $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+$
$$+2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_1a_n+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n);$$

5. $a^n-b^n=(a-b)a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}$, $n=2,3,4,\ldots$;

6. $a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)\left(a^{2k}-a^{2k-1}b+a^{2k-2}b^2+\ldots-ab^{2k-1}+b^{2k}\right)$, $k=1,2,\ldots$.

II. Задачи образци

Задача 1. Да се разложат на множители многочлените:

а) $a^2-b^2-4a-2b+3$;

б) a^4+a^2+1;

в) $a^3+b^3+c^3-3abc$;

г) $(x^2-7x+2)(x^2+x+2)+15x^2$;

д) $3(x^2-x+1)^2-5(x^3+1)-2(x+1)^2$;

е) $(x^2+2x-3)+(x^2-3x+2)^3-(2x^2-x-1)^3$;

ж) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)-5$.

Задача 2. Да се докаже, че:

а) $(x+y)^4+x^4+y^4=2(x^2+y^2+xy)^2$;

б) $(ax+by+cz)^2+(bx-ay)^2+(cx-az)^2+(cy-bz)^2=$
$$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2);$$

в) $(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)=\dfrac{x^{32}+x^{16}+1}{x^2+x+1}$;

г) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}=\dfrac{5}{x(x+5)}$

д) $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$, където $n\in N$;

е) ако $x+\dfrac{1}{x}=a$, то $x^3+\dfrac{1}{x^3}=a(a^2-3)$;

ж) ако $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$;

з) ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$, то $a^4+b^4+c^4=\dfrac{1}{2}$;

и) ако $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$, $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1$, то $xy+xz+yz=0$;

й) ако $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ и $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$, то $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

к) ако $x^2+xy+xz=a$, $y^2+xy+yz=b$, и $z^2+xz+yz=c$, то $ayz+bxz+cxy=\dfrac{3abc}{a+b+c}$.

§5. Доказване на неравенства

I. Основни понятия и теореми

Теорема 1. Ако A, B, C и D са алгебрични изрази, то:

1) $A>B \Leftrightarrow B<A$;

2) $A\ge B \Leftrightarrow A-B\ge 0$;

3) ако $A\ge B$ и $B\ge C$, то $A\ge C$;

4) ако $A\ge B$, то $A+C\ge B+C$ и $A-C\ge B-C$;

5) ако $A\ge B$ и $C>0$, то $A.C\ge B.C$;

6) ако $A\ge B$ и $C<0$, то $A.C\le B.C$;

7) $A\ge B \Leftrightarrow A^{2n+1}\ge B^{2n+1}$, $n\in N$;

8) ако $A\ge B$ и $B\ge 0$, то $A^{2n}\ge B^{2n}$, $n\in N$.

Теорема 2. (*Неравенство между средно аритметичното и средно геометричното*) Ако $a_1\ge 0$, $a_2\ge 0$, $\ldots$, $a_n\ge 0$, то $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3\ldots a_n}$ и равенството се достига точно тогава, когато $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n$.

Следствие. Ако $a_1\ge 0$, $a_2\ge 0$, $\ldots$, $a_n\ge 0$, то $a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n\ge n a_1 a_2\ldots a_n$.

При доказателството на неравенства от вида $A\ge B$, най-често се използват следните начини:

1. Лявата страна на неравенството последователно се замества с израз по-малък или равен, дотогава докато се получи дясната страна, т.е. $A\ge A_1\ge A_2\ge\ldots\ge A_p\ge B$ или $B\le B_1\le B_2\le\ldots\le B_k\le A$.

2. Образува се разликата $A-B$ и тя се замества с по-малък или равен израз докато се получи 0, т.е. $A-B\ge C_1\ge C_2\ge\ldots\ge C_p\ge 0$.

3. $\left.\begin{array}{l} A\ge A_1\ge A_2\ge\ldots\ge A_p\ge C \\ B\le B_1\le B_2\le\ldots\le B_k\le C\end{array}\right\}\Leftrightarrow A\ge B$.

4. Използва се Теорема 2 или следствието от нея.

II. Задачи образци

Задача 1. Да се докажат неравенствата от 1 до 16.

1. $x^2+y^2\ge xy+x+y-1$. Кога се достига равенство?

2. $x^2+4y^2+3z^2+14>2x+2y+6z$.

3. Ако $c>0$, то $\dfrac{a^2+3c^2+b^2+1}{2c}\ge a+b+1$.

4. Ако $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, то $(x+y)(x+z)(y+z) \geq 8xyz$. Кога се достига равенство?

5. Ако $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$. Кога се достига равенство?

6. Ако $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $(x+y+z)\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right) \geq a+b+c$.

7. $\frac{2x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}} \geq 1$.

8. Ако $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, то $a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$.

9. Ако $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, то $6a+4b+5c \geq 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc}$.

10. Ако $b \geq 0$, то $2a^2+5b \geq 6a\sqrt{b}$.

11. Ако $a+b+c \geq 0$, то $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$.

12. Ако $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, …, $x_n > 0$, то $(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$. Кога се достига равенство?

13. Ако $x+y+z \geq 1$, то $x^4+y^4+z^4 \geq \frac{1}{27}$. Кога се достига равенство?

14. Ако $a+b<1$, то $a^4+b^4<\frac{1}{8}$.

15. $a^4+b^4+c^4 > abc(a+b+c)$. Кога се достига равенство?

16. Ако $x^2+y^2=1$, то $-\sqrt{2} \leq x+y \leq \sqrt{2}$. Кога се достига равенство?

Задача 2. Да се докаже, че за всяко естествено число n са изпълнени неравенствата:

1. $\frac{2}{3} < \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1} < 2$;

2. $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < 1$;

3. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} < \frac{1}{4}$;

4. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2$;

5. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

§6. Индукция. Метод на математическата индукция

I. Основни понятия и теореми

Терминът "индукция" има две основни значения:

1. Това е един от видовете умозаключения, при което от две или повече единични или частни съждения се получава ново по-общо съждение.

2. Това е изследователски метод, при който за да се изучи някакво множество от обекти (някакво явление) се изучават отделни обекти (обстоятелства). Установените в тях свойства се считат за присъщи на цялото множество от обекти.

Индуктивни методи

Различават се два основни типа индукция – непълна и пълна индукция.

Определение 1. Непълна индукция се нарича умозаключение, основано на едно или няколко (но не всички) единични или частни съждения, отнасящи се за множество от обекти.

Заключението в резултат на непълна индукция не винаги е вярно съждение, а само вероятно вярно.

В историята на математиката са известни случаи, когато видни математици са допускали грешки в своите индуктивни изводи. Например, П.Ферма предположил, че всички естествени числа от вида $2^{2^n}+1$ са прости, като изхождал от това, че при $n=1,2,3,4$ те са такива. По-късно обаче Ойлер установил, че при $n=5$, числото $2^{32}+1$ се дели на 641, т.е. не е просто.

Поради недостоверността на заключението, непълната индукция не може да служи като метод за доказване. Но непълната индукция е мощен евристичен метод, т.е. метод за откриване на твърдения, откриване на идеята на доказателството при решаване на задачи и др.

При метода на непълната индукция чрез проверка за достатъчен брой случаи се открива общо свойство и се формулира предполагаемо твърдение (хипотеза). След това тази хипотеза трябва да се докаже или опровергае чрез други методи.

Определение 2. Пълна индукция се нарича умозаключение, основаващо се на разглеждането на всички частни или единични съждения, отнасящи се към дадена ситуация.

Методът на пълната индукция обикновено се прилага в следните случаи:

1. Когато изследваното множество от обекти се състои от малък брой елементи. В този случай се проверява дали твърдението е вярно за всеки елемент.

2. Когато изследваното множество е безкрайно, но то може да се разбие на малък брой класове на еквивалентност, т.е. на непразни подмножества, за които сечението на всеки две е празното множество, а обединението им е изследваното множество. В този случай се проверява дали твърдението е вярно за поне един елемент от получените класове на еквивалентност.

Метод на математическата индукция

Методът на математическата индукция е метод за доказване на твърдения, който се основава на така наречения принцип на математическата индукция.

Този метод не е индуктивен, а е дедуктивен метод.

Той се прилага за твърдения, отнасящи се за множеството на естествените числа или някое негово същинско подмножество.

Методът на математическата индукция, за доказване на твърдението $P(n)$ се осъществява в следните четири етапа:

1. Доказва се (проверя се), че твърдението $P(1)$.

Този етап се нарича база на математическата индукция.

2. Допуска се, че твърдението е вярно за естественото число k, т.е. вярно е $P(k)$.

Този етап се нарича индуктивно предположение.

3. Доказва се, че твърдението е вярно за $n=k+1$, т.е. от верността на $P(k)$ следва верността на $P(k+1)$.

Този етап се нарича стъпка на индукцията.

4. От верността на базата и стъпката се прави извод за верността на твърдението за всички естествени числа.

Обобщение на метода на математическата индукция.

Ако твърдението $P(z)$ е вярно за цялото число m и от това, че то е вярно за цялото число $k \geq m$ следва, че е вярно за следващото число $k+1$, то твърдението $P(z)$ е вярно за всяко цяло число $z \geq m$.

II. Задачи образци

Задача 1. Да се докаже, че за всяко естествено число n са верни тъждествата от №1 до №8:

1. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2. $1^2-2^2+3^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

3. $\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;

4. $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$;

5. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$;

6. $2.1^2+3.2^2+4.3^2+\ldots+(n+1)n^2=\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$;

7. $\dfrac{1^2}{1.3}+\dfrac{2^2}{3.5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

8. $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n+1)^3=(n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

Задача 2. Да се докаже, че са верни неравенствата от №1 до №8:

1. $2^n>n^3$, за всяко $n \geq 10$;

2. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\ldots+\dfrac{1}{3n+1}>1$, за всяко естествено число n;

3. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}<n$, за всяко естествено число $n>1$;

4. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$, за всяко естествено число n;

5. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$, за всяко естествено число $n\geq 3$;

6. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$, за всяко естествено число $n\geq 2$;

7. $2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$;

8. $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Задача 3. Да се докаже, че:

а) ако $x>-1$, то за всяко естествено число n е изпълнено неравенството $(1+x)^n\geq 1+nx$ (неравенство на Бернули);

б) ако a, b и c са съответно катети и хипотенуза на правоъгълен триъгълник, то за всяко естествено число $n>3$ е изпълнено неравенството $a^n+b^n<c^n$.

Задача 4. Ако x_1, x_2, …, x_n са реални числа с еднакви знаци, по-големи от -1, то за всяко естествено число n е изпълнено неравенството $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geq 1+x_1+x_2+\ldots+x_n$.

Задача 5. Ако x_1, x_2, …, x_n са произволни положителни числа, за които $x_1.x_2.x_3\ldots x_n=1$, да се докаже, че за всяко естествено число n е изпълнено неравенството $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n\geq n$.

Задача 6. Да се докаже, че числото:

а) n^7-n се дели на 42;

б) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ се дели на 133;

в) $3^{2n+3}-24n+37$ се дели на 64;

г) $4^n+15n-1$ се дели на 9;

д) $2^{n+2}.3^n+5n-4$ се дели на 25.

Задача 7. Да се намери броят на диагоналите на изпъкнал n-ъгълник.

Задача 8. В равнината са дадени n прави, никои две от които не са успоредни и никои три не минават през една точка. Да се намери броят на частите на които тези прави разделят равнината.

Глава II. АЛГЕБРА И ТРИГОНОМЕТРИЯ

§1. Квадратно уравнение. Квадратна функция. Квадратно неравенство

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([М], гл.I, §1).

Задача 1. Дадени са уравненията:

а) $(a-1)x^2+(a+4)x+a+7=0$,

б) $2ax^2-4(a+1)x+4a+1=0$,

в) $(2a-5)x^2-2(a-1)x+3=0$,

г) $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$,

където a е реален параметър. Определете броя на корените на всяко от горепосочените уравнения в зависимост от стойностите на a.

Задача 2. Намерете всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $(a+1)x^2+ax+a-3=0$ има не повече от един корен.

Задача 3. Да се докаже, че ако уравнението $x^2+px+q=0$ има два различни корена, то и уравненията $x^2+\left(p+2a\right)x+q+ap=0$ и $3x^2+2(p+a)x+q+ap=0$ имат по два различни корена за всяко a.

Задача 4. Да се намерят стойностите на a, b и c, за които всяко решение на уравнението $x(x-a)(x-b)=0$ е решение и на уравнението $(a-1)x^2+(a+b-3)x+a+b+c=0$.

Задача 5. Дадена е функцията $f(x)=ax^2+bx+c$. Ако $f(-3)<-5$; $f(-1)>0$ и $f(1)<4$, да се определи знака на a.

Задача 6. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които всяко x е решение на неравенството:

а) $(a+4)x^2-2ax+2a-6<0$;

б) $(a-3)x^2-2ax+3a-6\geq 0$;

в) $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2>0$.

Задача 7. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, за които неравенството $(k^2-7)x^2+2\left(k-1\right)x+2<0$ няма решение.

Задача 8. Да се докаже, че ако уравненията $x^2+ax+b=0$ и $x^2+cx+d=0$ нямат реални корени, то и уравнението $x^2+\dfrac{a+c}{2}x+\dfrac{b+d}{2}=0$ няма реални корени.

Задача 9. Докажете, че при $a\in\left(-\infty;+\infty\right)$ върхът на графиката на функцията $f(x)=x^2-(2a+1)x+2a$ описва парабола.

Задача 10. Намерете стойностите на реалния параметър a, за които корените на уравнението $(a-2)x^2-ax-a=0$ са симетрични относно точката $x=1$.

Задача 11. Намерете най-малката и най-голямата стойност на следните функции:

а) $f(x)=-3x^2-ax+2$ в интервала $[-1;1]$;

б) $f(x)=2x^2-2ax+1$ в интервала $[-1;1]$.

Задача 12. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които най-малката стойност на функцията $f(x)=x^2-(a+2)x+a^2$ в интервала $[-1;1]$ е равна на 4.

Задача 13. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които най-голямата стойност на функцията $f(x)=\dfrac{x-3}{ax^2-4x+a-3}$ е равна на 1.

Задача 14. Намерете геометричното място на точки с координати x и y, за които е в сила равенството $\min\limits_{x}\left(x^2+2xy-y^2\right)=\max\limits_{y}\left(-x^2-2xy-2y^2\right)$.

Задача 15. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравненията $3ax^2-5x+2a=0$ и $2x^2+ax-3=0$ имат поне един общ корен.

Задача 16. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията:

а) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-x+1}$; б) $f(x)=\dfrac{-x^2+2x-1}{6x^2-7x+3}$.

Задача 17. Да се докаже, че за всяко реално число x са в сила неравенствата $\dfrac{-1-\sqrt{208}}{23}\le\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x+3}\le\dfrac{-1+\sqrt{208}}{23}$.

Задача 18. Да се намери най-голямата стойност на израза $x+2y$, ако x и y са отрицателни и удовлетворяват неравенството $x^2-4xy+y^2+3\le 0$.

Задача 19. Да се намери най-голямата стойност на израза $3x+2y$, ако x и y са неположителни и удовлетворяват неравенството $2x^2-xy+3y^2\le 4$.

Задача 20. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на израза $x+2y$, ако x и y удовлетворяват неравенството $3x^2-2xy+4y^2\le 5$.

Задача 21. Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-x+1}$. Да се намерят всички стойности на x, за които $f(x)$ приема цели стойности.

Задача 22. Реалните числа x, y и a са такива, че $x+y=2a-1$ и $x^2+y^2=a^2+2a-3$. Намерете стойностите на a, за които произведението xy приема най-малка стойност.

Задача 23. Да се намерят всички двойки цели числа (x,y), които удовлетворяват равенствата:

а) $x^2-4xy+6y^2-2x+3y-9=0$;

б) $x^2-6xy+13y^2-100=0$.

Задача 24. Да се решат неравенствата:

а) $x^2+ax+a>0$; б) $x^2+ax+1<0$, където a е реален параметър.

§2. Рационални уравнения

В този параграф се използват основните понятия и теореми разгледани в ([М], гл.I, §2).

Да се реши уравнението в задачите от № 1 до № 42:

Задача 1. $2x^4-13x^3+23x^2-3x-9=0$.

Задача 2. $2x^4-7x^3-16x^2+63x-18=0$.

Задача 3. $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8=0$.

Задача 4. $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6=0$.

Задача 5. $x^4+2x^3-4x^2-17x+18=0$.

Задача 6. $6x^4-13x^3+19x^2-x-3=0$.

Задача 7. $x^4-6x^3+10x^2-3x-2=0$.

Задача 8. $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6=0$.

Задача 9. $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3=0$.

Задача 10. $\left(x^2-6x-9\right)^2=x^3-4x^2-9x$.

Задача 11. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$.

Задача 12. $x(x+1)(x-1)(x+2)=24$.

Задача 13. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=1$.

Задача 14. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$.

Задача 15. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$.

Задача 16. $(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=\dfrac{9}{2}$.

Задача 17. $\left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2+5x+1\right)=9x^2$.

Задача 18. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0$.

Задача 19. $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

Задача 20. $(x-2)^6+(x-4)^6=64$.

Задача 21. $(x+1)^5+(x-1)^5=32x$.

Задача 22. $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$.

Задача 23. $(x+3)^4+(x+1)^4=20$.

Задача 24. $(x-2)^4+(x-3)^4=1$.

Задача 25. $x^5+(6-x)^5=1056$.

Задача 26. $x^2(x-1)^2+x(x^2-1)=2(x+1)^2$.

Задача 27. $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$.

Задача 28. $(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0$.

Задача 29. $(x-3)^4+(x-2)^4-(2x-5)^4=0$.

Задача 30. $(x-3)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$.

Задача 31. $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+1)(x^2+6x+1)+2(x^2+1)^2=0$.

Задача 32. $6x^4+25x^3+12x^2-25x+6=0$.

Задача 33. $x^4+3x^3-44x^2+15x+25=0$.

Задача 34. $x^4-x^3-10x^2+2x+4=0$.

Задача 35. $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$.

Задача 36. $x^4-2x^3-11x^2+12x+36=0$.

Задача 37. $x^5-2x^4-3x^3-3x^2+2x+1=0$.

Задача 38. $x^5+3x^4-x^3+2x^2-24x-32=0$.

Задача 39. $12x^5+18x^4-45x^3-45x^2+18x+12=0$.

Задача 40. $x^5-3x^4-2x^3-4x^2-24x+32=0$.

Задача 41. $4x^6+5x^5-3x^4+6x^2+20x-32=0$.

Задача 42. $4x^6+5x^5-3x^4+50x^3-9x^2+45x+108=0$.

Задача 43. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $3x^4+4x^3-6x^2-12x+a=0$ има кратен корен и да се намери този корен.

Задача 44. Ако a е реален параметър, да се реши уравнението:

а) $x^4+x^3-3a^2x^2-2a^2x+2a^4=0$;

б) $x^4-2ax^2-x+a^2-a=0$;

в) $4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8=0$.

Да се реши уравнението в задачите от № 45 до № 65

Задача 45. $x^4-2\sqrt{2}x^2-x+2-\sqrt{2}=0$.

Задача 46. $x^4=\dfrac{11x-6}{6x-11}$.

Задача 47. $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2$.

Задача 48. $\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{1}{x^2-2x+3}=\frac{9}{2x^2-4x+8}$.

Задача 49. $\frac{1}{x^2-3x+3}+\frac{2}{x^2-3x+4}=\frac{6}{x^2-3x+5}$.

Задача 50. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$.

Задача 51. $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15}$.

Задача 52. $\frac{x^2-13x+15}{x^2-14x+15}-\frac{x^2-15x+15}{x^2-16x+15}=-\frac{1}{2}$.

Задача 53. $\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}$.

Задача 54. $\frac{16}{x^3+3x^2-x+5}-\frac{5}{x^3+3x^2-x+2}=1$.

Задача 55. $\frac{2x}{3x^2-x+2}-\frac{7x}{3x^2+5x+2}=1$.

Задача 56. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0$.

Задача 57. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+6}$.

Задача 58. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

Задача 59. $\left(\frac{x+6}{x-6}\right)\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\left(\frac{x-6}{x+6}\right)\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2=2\frac{x^2+36}{x^2-36}$.

Задача 60. $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$.

Задача 61. $x^2+\frac{25x^2}{(2x+5)^2}=\frac{74}{49}$.

Задача 62. $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5$.

Задача 63. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=90$.

Задача 64. $x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11$.

Задача 65. $x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40$.

Задача 66. Дадени са уравненията $4ax^2-4(2a+1)x+7a=0$ и $4(a-1)x^2-(10a-13)x+7a-7=0$. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравненията имат поне един общ корен.

§3. Рационални неравенства и системи неравенства с едно неизвестно

В този параграф съществено се използват теоремите и методът на интервалите, разгледани в ([М], стр.22, 23).

Задача 1. Да се решат неравенствата от № 1 до № 14:

1. $(x+3)(3x-2)^5(7-x)^3(5x+8)^2<0$;

2. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24>0$;

3. $3x^2(x-4)^2<32-5(x-2)^2$;

4. $(x^2-3x+2)(x^3-3x^2)(4-x^2)\le 0$;

5. $(x+3)^4+(x+5)^4\ge 4$;

6. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}\ge\dfrac{1}{x}$;

7. $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{2}{3x-1}\ge\dfrac{3}{2x-3}$;

8. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{4+x}+\dfrac{1}{5+x}-\dfrac{1}{6+x}+\dfrac{1}{7+x}>0$;

9. $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)(x-1)\ge 2(x-1)^2$;

10. $x^4-3x^3-2x^2+6x+4\ge 0$;

11. $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}-\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}>\dfrac{3}{2}$;

12. $x^2+(x+1)^2<\dfrac{15}{x^2+x+1}$;

13. $x^4-2x^3+x^2-8x-12\ge 0$;

14. $\dfrac{(4x^2-4x+1)(2-x-x^2)}{(x^2-4)(x+2)}\ge 0$.

Задача 2. Да се реши системата:

а) $\begin{vmatrix} 8x-2<x-1 \\ 2x^2-x-1\le 0 \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 4x^2-4x-3\le 0 \\ \dfrac{1}{x^2}\ge 1 \end{vmatrix}$

Задача 3. За всяко $a\ge 0$ да се решат неравенствата:

а) $a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\ge 0$;

б) $4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8\ge 0$;

в) $x^4+ax^3+a^4x-a^6\le 0$.

Задача 4. Дадени са уравненията $x^2+2x+a=0$ и $(1+a)(x^2+2x+a)-2(a-1)(x^2+1)=0$. Докажете, че едно от тези уравнения има реални корени точно тогава, когато другото няма реални корени.

§4. Системи уравнения

В този параграф се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([М], гл.I, §4).

Задача 1. Да се решат системите от № 1 до № 42:

1. $\begin{vmatrix} y^3+z^3=7x^3 \\ y-z=3x \\ z-x=y-2 \end{vmatrix}$; **2.** $\begin{vmatrix} xy+yz=18 \\ xz+zy=20 \\ yx+xz=8 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} x^3+4y=y^3+16x \\ 1+y^2=5(1+x^2) \end{vmatrix}$; **4.** $\begin{vmatrix} 2x^2+y-z=-1 \\ z+y-2x=1 \\ x^4+zy-y=1 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} \dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{\dfrac{2}{2x-y}}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18} \end{vmatrix}$; **6.** $\begin{vmatrix} x^2-\sqrt{y}=1 \\ 5x^4-8x^3\sqrt{y}+2y=2 \end{vmatrix}$;

7. $\begin{vmatrix} x^2+3xy+y^2=61 \\ xy=12 \end{vmatrix}$; **8.** $\begin{vmatrix} x^3+x^3y^3+y^3=17 \\ x+xy+y=0 \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} x^2+y^2=5 \\ x+y+3xy=9 \end{vmatrix}$; **10.** $\begin{vmatrix} x^4+x^2y^2+y^4=21 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{vmatrix}$;

11. $\begin{vmatrix} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25 \\ x^2-y^2=3 \end{vmatrix}$; **12.** $\begin{vmatrix} x^4+3x^2y^2+y^4=109 \\ x^2+y^2+xy=13 \end{vmatrix}$;

13. $\begin{vmatrix} \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+3\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=4 \\ x^2+4x+y^2-3y=0 \end{vmatrix}$; **14.** $\begin{vmatrix} 6x+y^2-z^2=6 \\ x^2-y-4z=-4 \\ 21x^2-2y^2+3y=22z^2 \end{vmatrix}$;

15. $\begin{vmatrix} x^3+xy^2=40y \\ y^3+x^2y=10x \end{vmatrix}$; **16.** $\begin{vmatrix} x^2-xy+y^2=21 \\ y^2-2xy+15=0 \end{vmatrix}$;

17. $\begin{vmatrix} 2x^2+3xy-y^2=4 \\ 3x^2+2xy-2y^2=3 \end{vmatrix}$; **18.** $\begin{vmatrix} x^3+y^3=4 \\ x^3.y^3=1 \end{vmatrix}$;

19. $\begin{vmatrix} x^2+xy=6 \\ y^2+xy=3 \end{vmatrix}$; **20.** $\begin{vmatrix} x^2+y^2-z^2=(x+y-z)^2+2 \\ x^3+y^3-z^3=(x+y-z)^3+9 \\ x^4+y^4-z^4=(x+y-z)^4+9 \end{vmatrix}$;

21. $\begin{vmatrix} 2x^2-xy-y^2-4x+4y=0 \\ x^2+xy-2y^2-5x+5y=0 \end{vmatrix}$; **22.** $\begin{vmatrix} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0 \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0 \end{vmatrix}$;

23. $\begin{vmatrix} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0 \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0 \end{vmatrix}$; **24.** $\begin{vmatrix} 2x^2+y^2-4x+2y=1 \\ 3x^2-2y^2-6x-4y=5 \end{vmatrix}$;

25. $\begin{cases} 3x^2+2xy-9x-4y+6=0 \\ 5x^2+2xy-12x-4y+4=0 \end{cases}$; **26.** $\begin{cases} 2xy+y^2-4x-3y+2=0 \\ xy+3y^2-2x-14y+16=0 \end{cases}$;

27. $\begin{cases} 3x^2+2y^2-3x+5y=3 \\ 4{,}5x^2+3y^2-3x+8y=7 \end{cases}$; **28.** $\begin{cases} 2x^2+y^2+x-2y=1 \\ 5x^2+2{,}5y^2+3x-4y=4 \end{cases}$;

29. $\begin{cases} 2x^2-3xy+2x-4y=1 \\ 2y^2+x^2+6x-12y=3 \end{cases}$; **30.** $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+y^3+3=0 \end{cases}$;

31. $\begin{cases} x^2+4x^2y^2+4y=0 \\ 4x^3-4y^2-4y-5=0 \end{cases}$; **32.** $\begin{cases} y^2-xy+1=0 \\ x^2+2x=-y^2-2y-1 \end{cases}$;

33. $\begin{cases} x^2-xy^2+4=0 \\ x^2+y^2+4=4x+2y \end{cases}$; **34.** $\begin{cases} (x+3)^3=3-2y \\ z^2+4y^2=8y \\ (2z-x)(x+3)=5x+16 \\ z\ge 0 \end{cases}$;

35. $\begin{cases} 2(y-2)(y-x)=x-2 \\ 4z^2+x^2=4x \\ 8z^3+x=3yz \\ x\le 2 \end{cases}$; **36.** $\begin{cases} z+2=(3-x)^3 \\ (2y-z)(z+2)=9+4z \\ x^2+y^2=4x \\ y\ge 0 \end{cases}$;

37. $\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0 \\ z^3-9y^2+27y-27=0 \\ x^3-9z^2+27z-27=0 \end{cases}$; **38.** $\begin{cases} 2y^3+2x^2+3x+3=0 \\ 2z^3+2y^2+3y+3=0 \\ 2x^3+2z^2+3z+3=0 \end{cases}$;

39. $\begin{cases} y^3-6x^2+12x-8=0 \\ z^3-6y^2+12y-8=0 \\ x^3-6z^2+12z-8=0 \end{cases}$; **40.** $\begin{cases} y^3+2x^2+6x+12=0 \\ z^3+2y^2+6y+12=0 \\ x^3+2z^2+6z+12=0 \end{cases}$;

41. $\begin{cases} x=\dfrac{2y}{1+y^2} \\ y=\dfrac{2z}{1+z^2} \\ z=\dfrac{2x}{1+x^2} \end{cases}$; **42.** $\begin{cases} \left|y+\dfrac{1}{x}\right|+\left|\dfrac{13}{6}+x-y\right|=\dfrac{13}{6}+x+\dfrac{1}{x} \\ x^2+y^2=\dfrac{97}{36} \\ x<0 \\ y>0 \end{cases}$.

Задача 2. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които системата:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$ има две решения;

б) $\begin{cases} y-x=a(1+xy) \\ 2xy+x+y+1=0 \end{cases}$ има само едно решение;

в) $\begin{cases} ay^2-x-a-1=0 \\ ax^2-y-a-1=0 \end{cases}$ има четири решения.

Задача 3. Най-малката стойност на квадратната функция $f(x)$ е равна на 5. Ако за реалните числа x, y и z е в сила

$$\begin{cases} x^2-2xz+4x-2z+7=0 \\ y^2+z^2-4y-2z+1=0 \\ 2xyz-yz=f(x) \end{cases},$$

определете $f(x)$.

§5. Зависимости между корените и коефициентите на квадратното уравнение

В този параграф се използват понятията и теоремите, разгледани в ([M], гл.I, §5).

Задача 1. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, да се изразят чрез коефициентите му следните многочлени:

а) $P(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4$; б) $Q(x_1,x_2)=4x_1^3-3x_1x_2^3-5x_1^2x_2^2-3x_1^3x_2+4x_2^3$;

в) $E(x_1,x_2)=x_1^3-x_2^3$; г) $F(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{x_2-3}-\dfrac{x_2}{x_1-3}$.

Задача 2. Дадено е уравнението $(m-4)x^2+(m+1)x+m-4=0$, $m\neq 4$, където m е реален параметър. Да се намерят стойностите на m, за които корените му са реални и удовлетворяват съответно зависимостта:

а) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{5}{8}$; б) $\dfrac{x_1+1}{x_2}+\dfrac{x_2+1}{x_1}=\dfrac{11}{2}$; в) $3x_1-5x_2=6$.

Задача 3. Да се докаже, че за всяка реална стойност на параметъра m корените x_1 и x_2 на уравнението $(m^2-m+2)x^2-(2m^2-2m+5)x+m^2-m+2=0$ са реални и положителни и да се пресметне стойността на израза $M=\dfrac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1x_2}}$.

Задача 4. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-2(k+1)x+4k=0$, да се намерят стойностите на реалния параметър k, за които $x_1^2+x_2^2>16-8k$.

Задача 5. При кои стойности на реалния параметър k между корените на уравнението $x^2-x+k=0$ е в сила зависимостта $x_1^2+x_2^2\leq 7$?

Задача 6. При кои стойности на реалния параметър k корените на уравнението $y^2-2ky+6k-10=0$ са реални и сборът от квадратите им е най-малък?

Задача 7. Дадено е уравнението $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на a, за които корените на уравнението

а) са положителни; б) са отрицателни;

в) имат различни знаци, като положителният е по-малък от модула на отрицателния.

Задача 8. В зависимост от реалния параметър a, да се определят знаците на корените на уравнението:

а) $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$, $a\neq 3$;

б) $(a+5)x^2+(2a-3)x+a-10=0$, $a\neq -5$;

в) $(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$, $a\neq \dfrac{1}{3}$.

Задача 9. Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-mx^2+(m+2)x+m^3-m^2-\dfrac{10}{3}m$. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-2mx+m+2=0$, да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които $f(x_1)+f(x_2)\geq 0$.

Задача 10. Дадено е уравнението $(m-2)x^4-2mx^2-1+2m=0$, където m е реален параметър. Да се намерят стойностите на m, за които уравнението:

а) има четири различни реални решения;

б) има само две различни реални решения;

в) няма реални корени;

г) има поне един реален корен.

Задача 11. Да се изследва за кои реални стойности на m уравнението $mx^4-2(m-2)x^2+m-5=0$ има реални корени и какви са техните знаци при всички възможни стойности на m.

Задача 12. Да се определят стойностите на реалния параметър m, за които корените на уравнението $x^4-(3m+5)x^2+(m+1)^2=0$ образуват аритметична прогресия.

Задача 13. Ако a е реален параметър и корените x_1, x_2, x_3 и x_4 на уравнението $x^4-2(a+2)x^3+(9a+1)x^2-2(a^2+2)x+a=0$ са реални и положителни, да се намерят стойностите на a, за които е изпълнено $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}\geq 3a$.

§6. Разпределение на корените на квадратно уравнение и решенията на квадратно неравенство върху числовата ос

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми от ([M], гл.I, §1, §6).

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които корените на уравнението $a x^2 - 2(2a-1)x + 2 - 3a = 0$ са по-малки от 1.

Задача 2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които корените на уравнението $(a-1)x^2 - (a+1)x + a = 0$ принадлежат на интервала $(0;3)$.

Задача 3. Определете как са разпределени корените на уравнението $a x^2 - 3(a+1)x + 2a + 7 = 0$ спрямо интервала $[-1;4]$.

Задача 4. Определете как са разпределени корените на уравнението $a x^2 - (a^3+1)x + a^2 = 0$ спрямо интервала $[1,3]$.

Задача 5. Докажете, че за всяко реално число a поне едно от уравненията $x^2 - (a^2 - a)x + a - 2 = 0$, $x^2 + (2 - a^2)x + a^2 - a - 1 = 0$ има два различни корена.

Задача 6. Да се намерят стойностите на реалния параметър p, за които съществува реално q такова, че единият от корените на уравнението $x^2 + p x + q = 0$ принадлежи на интервала $[1;2]$, а другият принадлежи на интервала $[5;7]$.

Задача 7. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $(a-1)x^2 - 2a x + 2 - 3a = 0$ има единствен корен, удовлетворяващ неравенството $x > 1$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $(a-1)x^2 - (a+1)x + a = 0$ има единствен корен, принадлежащ на интервала $(0;3)$.

Задача 9. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които числото a е между корените на уравнението $2x^2 - 2(2a+1)x + a(a+1) = 0$.

Задача 10. В зависимост от стойностите на реалния параметър a определете броя на корените на уравнението $(a+1)x^2 - 3a x + 4a = 0$, които са по-малки от 1.

Задача 11. В зависимост от стойностите на реалния параметър a определете броя на корените на уравнението $(4-a)x^2 - 6a x + 3 = 0$, принадлежащи на интервала $[-1;3)$.

Задача 12. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които всяко решение на неравенството $a x^2 - 2x - a(a^2+2) < 0$ е решение и на неравенството $x^2 \le 9$.

Задача 13. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $x^4 + (a-1)x^3 + x^2 + (a-1)x + 1 = 0$ има най-малко два отрицателни корена.

Задача 14. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които от неравенството $x^2-3x+2<0$ следва неравенството $ax^2-(3a+1)x+3\geq 0$.

Задача 15. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които:

а) всяко решение на неравенството $x^2-x-2<0$ е по-голямо от всяко решение на неравенството $ax^2-4x-1\geq 0$;

б) от неравенството $x^2-x-2<0$ следва неравенството $ax^2-4x-1\geq 0$.

Задача 16. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които всяко решение на неравенството $x^2-(a-1)x+a+1<0$ е по-малко от всяко решение на неравенството $x^2-(a+1)x+3a+1\leq 0$.

Задача 17. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които множеството от решения на неравенството $x^2-(a+1)ax+a^3\leq 0$ съдържа най-малко пет цели числа.

Задача 18. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които множеството от решения на неравенството $x(x-4)+a^2(a+4)\leq ax(a+1)$ съдържа най-много четири цели числа.

Задача 19. Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които от неравенството $(m-2)x^2-x+3-m<0$ следва неравенството $x^2-x<0$.

Задача 20. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които всяко решение на неравенството $ax^2+(1-a^2)x-a>0$, $a\neq 0$ е в интервала $[-2;2]$.

Задача 21. Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които неравенството $(2+m)x^2-4x+3m+7>0$ е изпълнено за всяко $x>0$.

Задача 22. Дадени са квадратните уравнения (1) $x^2-2kx+4=0$ и (2) $x^2-2(k-1)x+4=0$, където k е реален параметър. Ако x_1 и x_2 са корените на (1), а x' и x'' са корените на (2), да се намерят стойностите на k, за които са изпълнени неравенствата $x_1<x'<x''<x_2$.

Задача 23. Дадено е уравнението $x^4+(m-4)x^3+(m+4)x^2+(m-4)x+1=0$, където m е реален параметър. Да се намерят стойностите на m, за които уравнението няма реални корени.

Задача 24. Наредете по големина корените на уравненията (1) $x^2+\dfrac{3x}{a}+2a=0$ и (2) $x^2+\dfrac{12x}{a}-a=0$ в зависимост от стойностите на реалния параметър a.

Задача 25. Ако a е реален параметър да се реши системата:

а) $\left|\begin{array}{l} x^2-3x+2\leq 0 \\ ax^2-2(a+1)x+a-1\geq 0 \end{array}\right.$; **б)** $\left|\begin{array}{l} x^2-2x-3+a>0 \\ x^2-4x+3+a<0 \end{array}\right.$.

§7. Уравнения и неравенства, съдържащи неизвестно и под знака за модул. Основни методи за решаване

I. Метод на еквивалентността.

Като средство за реализиране на този метод съществено се използват следните понятия и теореми.

Определение 1. Ако $f(x)$ е дадена функция, то $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & при\ f(x) \geq 0 \\ -f(x), & при\ f(x) < 0. \end{cases}$

Теорема 1. Уравнението $|f(x)| = g(x)$ е еквивалентно на точно една от съвкупностите от системи:

(1) $\left|\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right.$ или $\left|\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$ и (2) $\left|\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right.$ или $\left|\begin{array}{l} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$

При решаване на уравнения се използва (1) или (2) в зависимост от това дали $f(x)$ или $g(x)$ имат по-прост вид.

Теорема 2. Неравенството $|f(x)| \leq g(x)$ е еквивалентно на системата от неравенства $\left|\begin{array}{l} f(x) \geq -g(x) \\ f(x) \leq g(x). \end{array}\right.$

Теорема 3. Неравенството $|f(x)| \geq g(x)$ е еквивалентно на съвкупността от неравенства $f(x) \leq -g(x)$ или $f(x) \geq g(x)$.

II. Метод на интервалите

За решаване на уравнения и неравенства с модули се използва за уравнения (неравенства) от вида

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + |f_3(x)| + \ldots + |f_n(x)| = \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \end{pmatrix} g(x),$$

където $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ са дадени функции, може да се използва т.н. метод на интервалите, който се реализира чрез следния алгоритъм:

1. Намира се дефиниционната област D_x на уравнението (неравенството), която най-често е интервал или обединение на интервали.

2. Намират се нулите (корените) на всяка от функциите f_1, f_2, ..., f_n (най-често краен брой).

3. Чрез получените корени дефиниционната област на уравнението се разделя на краен брой подинтервали.

4. Определя се знака на всяка от функциите f_1, f_2, ..., f_n във всеки един от получените подинтервали (Добре е резултатите да се оформят в таблица).

5. Като се използва определение (1), изходното уравнение (неравенство) се свежда до съвкупност от системи, несъдържащи модули.

6. Записва се решението на уравнението (неравенството).

7. Ако $D_x = \emptyset$, даденото уравнение няма решение, ако D_x се състои от краен брой числа, проверява се непосредствено кои от тях са решения.

III. Приложение на някои неравенства и свойствата на функциите за решаване на уравнения и неравенства с модули

Като средства за реализиране на този подход съществено се използват основните понятия от ([M], гл.I, §1), неравенството между средно аритметичното и средно геометричното, Т1 от ([M], стр.78) и следната теорема

Теорема 4. Ако $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са дадени функции, то за всяко x от дефиниционната им област е в сила неравенството $|f_1(x)|+|f_2(x)| \geq |f_1(x)+f_2(x)|$, като:

1. $|f_1(x)|+|f_2(x)| = |f_1(x)+f_2(x)| \Leftrightarrow f_1(x).\,f_2(x) \geq 0$;
2. $|f_1(x)|+|f_2(x)| > |f_1(x)+f_2(x)| \Leftrightarrow f_1(x).\,f_2(x) < 0$;
3. $|f_1(x)+f_2(x)| = f_1(x)+f_2(x) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f_1(x) \geq 0 \\ f_2(x) \geq 0. \end{array} \right.$

Задача 1. Да се решат уравненията от № 1 до № 23:

1. $2|x^2+2x-5| = x-1$;

2. $\left|\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}\right| = -\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-12x+32}$;

3. $|2x-3| = x^2-2x-4$;

4. $|x-|4-x||-2x = 4$;

5. $\dfrac{1-2x}{3-|x-1|} = 1$;

6. $||x^2-3x|-x+1| = 2x^2+x-1$;

7. $||x^3+x^2-1|-4| = x^3-x^2+3$;

8. $||2x-3|-x+1| = 4x-1$;

9. $|3x-8|-|3x-2| = 6$;

10. $|x|+|7-x|+2|x-2| = 4$;

11. $|x^2-4x+3|+|x^2-5x+6| = 1$;

12. $|x^2-9|+|x-2| = 5$;

13. $\dfrac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} = 1$;

14. $(1+x)|x+2|+x|x-3| = 6x+2$;

15. $\left|\dfrac{x}{x-1}\right|+|x| = \dfrac{x^2}{|x-1|}$;

16. $|4x^2-1|+|x^2-6x+2| = 3|x^2+2x-1|$;

17. $|x^3-2x^2+2x-1|+|x^3-3x| = -2x^2+5x-1$;

18. $|x^2-4|+|a-4| = |x^2-a|$, където a е реален параметър;

19. $|x^2-3|+\dfrac{1}{|x^2-3|} = -x^8+32x^4-254$;

20. $|x^2-9|+|x^2-4| = 5$;

21. $|x^3-3x^2+4x-2|+|x^3-4x^2+4x-1| = |x^2-1|$;

22. $|3x^2-2|+\dfrac{1}{|3x^2-2|} = \dfrac{4x}{x^2+1}$;

23. $x^2-2|x-a|+2|x-2|=0$, където a е реален параметър;

Задача 2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението:

а) $x|x-2a|-a+1=0$ има само един корен;

б) $x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$ има точно два различни корена;

в) $|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=a$ има повече от три корена.

Задача 3. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $a^3+a^2|a+x|+|a^2x+1|=1$ има най-малко четири различни решения, които са цели числа.

Задача 4. Да се решат неравенствата от № 1 до № 13:

1. $|x^3-x|\ge 1-x$;

2. $||x|-1|<1-x$;

3. $\left|1-\dfrac{|x|}{1+|x|}\right|\ge\dfrac{1}{2}$;

4. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\ge 2$;

5. $|x^2-5x+4|<a$, където a е реален параметър;

6. $x+|3-2x|>|x+1|-1$;

7. $\dfrac{|x^2+x-2|+|x^2-x-2|}{x^2+1}\le 1$;

8. $|x^2-9|+|x^2-1|+|a+1|>|a-7|$;

9. $|x-1|+\dfrac{1}{|x-1|}+x^2>4x-2$;

10. $\left|\dfrac{x^2-45}{x+3}\right|+\dfrac{|x+3|}{4}+\dfrac{4}{|x^2-45|}>-x^2-14x-46$;

11. $|x^2-x-1|+\dfrac{1}{|x^2-x-1|}>-x^4+2x-1$;

12. $|x-1|+|x-2|\ge\dfrac{2x}{x^2+1}$;

13. $|x^4-5x^2+4|+|x^2-2x-3|>|x^4-6x^2+2x+7|$.

Задача 5. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които всяко реално x е решение на неравенството $x^2-|x-a|-|x-1|+3\ge 0$.

Задача 6. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството $x^2+x+|x-a|+\dfrac{2}{9}\le 0$ има поне едно решение.

Задача 7. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, $a\ne 0$, за които множеството от решения на неравенството $a^2\left|a+\dfrac{x}{a^2}\right|+|1+x|\le 1-a^3$ съдържа поне четири цели числа.

Задача 6. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които:

а) най-малката стойност на функцията $f(x)=a\,x+\left|x^2-4\,x+3\right|$ е по-голяма от 1;

б) най-малката стойност на функцията $f(x)=3\left|x-a\right|+\left|x^2+x-2\right|$ е по-малка от 2;

в) най-малката стойност на функцията $f(x)=x^2+2\left|x+a-1\right|+(a+1)^2$ е по-малка от 3;

г) най-малката стойност на функцията $f(x)=x^2+\left|x-a\right|+\left|x-1\right|$ е по-голяма от 2.

§8. Ирационални уравнения и неравенства

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([М], гл.I, §7, §8 и §11).

Задача 1. Да се решат уравненията от № 1 до № 51:

1. $\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{2\,x-3}=\sqrt{1-x^2}$;

2. $\sqrt{x^3-6\,x^2+9\,x-4}+\sqrt{-x^3+x^2+16\,x-16}=x^2-4\,x+3$;

3. $\sqrt{11\,x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9\,x+7}+\sqrt{x-2}=0$;

4. $\sqrt[6]{4-x^2}+\sqrt[6]{x^2-4}=x^3+8$;

5. $\dfrac{3\,x-2}{\sqrt{2\,x-1}}=\sqrt{(2\,x-1)^3}$;

6. $\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\dfrac{2}{x}$;

7. $\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}=\sqrt{2\left(x^3+1\right)}$;

8. $\sqrt{2\,x^2-1}+\sqrt{x^2-3\,x-2}=\sqrt{2\,x^2+2\,x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$;

9. $\left(x^2-4\right)\sqrt{x+1}=0$;

10. $\left(x^2-5\,x+6\right)\sqrt{2-x}=0$;

11. $(x+1)\sqrt{16\,x+17}=8\,x^2-15\,x-23$;

12. $\sqrt{4\,x^2+9\,x+5}-\sqrt{2\,x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$;

13. $\sqrt{x^2+5\,x+3}-\sqrt{x^2+3\,x+2}=2\,x+1$;

14. $\sqrt[3]{x^2-2}=\sqrt{2-x^3}$;

15. $2\,x^2-6\,x+\sqrt{x^2-3\,x+6}+2=0$

16. $x\sqrt{3-x}-5x=1+\sqrt{3-x}$;

17. $6x^2+7x\sqrt{x+1}=24(1+x)$;

18. $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}-28=0$;

19. $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$;

20. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$;

21. $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$;

22. $\sqrt{1-x^2}=\left(\dfrac{2}{3}-\sqrt{x}\right)^4$;

23. $\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$;

24. $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{x^2-5x+6}$;

25. $4\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}=4+x$;

26. $4x^4+1=4x\sqrt{2}\sqrt{x^4-\dfrac{1}{4}}$;

27. $x^2+x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0$;

28. $(x-1)\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{3-x}}+(3-x)\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{x-1}}=2$;

29. $\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}x$;

30. $\sqrt{x+1}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}=1$;

31. $(2x-1)^2=\sqrt{x}\left(6x-2\sqrt{x}-3\right)$;

32. $25x^2-11x-6\sqrt{x}-8=0$;

33. $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{3-x}=1$;

34. $\sqrt{x+5}=5-x^2$;

35. $\sqrt{7-\sqrt{7-x}}=x$;

36. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=3x-6+2\sqrt{2x^2-3x-9}$;

37. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=4x-15+4\sqrt{x^2-4}$;

38. $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}=\dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$;

39. $(x^2-2x)^3+x\sqrt{x(x-2)^3}=2$;

40. $4x^2+5x\sqrt{x+5}=44(x+5)$;

41. $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$;

42. $\sqrt{x+2}+3\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=10$;

43. $\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{17-x}$;

44. $\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^5-7}=8$;

45. $\sqrt[3]{x^2+x+1}+\sqrt{2x+1}=2$;

46. $2\sqrt{6-x-x^2}+x=2\sqrt{x^2+25}-3$;

47. $\left|x^2-\sqrt{x-3}\right|=\left|\sqrt{x-3}-2\right|+\left|x^2-2\right|$;

48. $\left|\sqrt{x^2-5x+6}-a\right|=\left|\sqrt{x^2-5x+6}-\sqrt{2}\right|+\left|a-\sqrt{2}\right|$;

49. $\sqrt{x-3}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}=\dfrac{4x-12}{x^2-6x+10}$;

50. $\sqrt{a^2+x\sqrt{x^2+b^2-a^2}}=x-a$, където a и b са реални параметри;

51. $x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-2}=m$, където m е реален параметър.

Задача 2. Да се решат неравенствата от № 1 до № 24:

1. $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\ge\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$;

2. $\sqrt{-x^2+5x-6}<\sqrt{4x^2+12x+11}$;

3. $\dfrac{\sqrt{52-x^2}}{2-x}<1$;

4. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$;

5. $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$;

6. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}<\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$;

7. $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1$;

8. $-2(x+1)>(x+2)\left(\sqrt{x+1}-x-2\right)$;

9. $(x+1)^2<4\sqrt{x}\left(x+3\sqrt{x}+1\right)$;

10. $2x(x-1)+1>\sqrt{x^2-x-1}$;

11. $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}}<4$;

12. $x^2+5x+4<5\sqrt{x^2+5x+28}$;

13. $\frac{1}{4}x > \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)$;

14. $x\sqrt{10-x^2} > x^2-6$;

15. $x\sqrt{3x^2+5x-6} < x^2+2x$;

16. $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$;

17. $2x+2+x\sqrt{x^2+1}+(x+2)\sqrt{x^2+x+2} < 0$;

18. $\sqrt{x^2-3}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3}} > -x^4+8x^2-14$;

19. $3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-25} > \frac{120}{x}$;

20. $\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2} > 4+\sqrt{3-x}$;

21. $\sqrt[3]{3x^2+2x+1}+\sqrt{2x+1} < 2$;

22. $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \geq \sqrt{4x+13}+\sqrt{x+1}$;

23. $\sqrt{a^2-x^2} > x+1$, където a е реален параметър и $a \geq 0$;

24. $\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}} < a-1$, където a е реален параметър.

§9. Показателни уравнения и неравенства

В този параграф се използват основните понятия и теореми и методи, разгледани в ([M], гл.I, §9).

Задача 1. Да се решат уравненията от № 1 до № 33:

1. $\sqrt{\frac{3}{5}}\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} = \frac{\sqrt[4]{5^{3x-4}}}{\sqrt{5}}$;

2. $\left(3.2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2} = 1$;

3. $x^{\sqrt[3]{x^2}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$;

4. $5.8^{\frac{x}{x+1}} = 100$;

5. $10^{\sqrt{5x}-\frac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x-1}}} = 1000\sqrt{10}$;

6. $\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18$;

7. $\sqrt{x}.4^{x}+5.2^{x+1}+2\sqrt{x}=2^{2x+1}$;

8. $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$;

9. $5.2^{3x-3}-3.2^{5-3x}+7=0$;

10. $27^{x}+12^{x}=2.8^{x}$;

11. $6.\sqrt[x]{9}-13.\sqrt[x]{6}+6.\sqrt[x]{4}=0$;

12. $2^{x}+3^{x}=\sqrt{6^{x}-9^{x}}$;

13. $7^{3x+1}+2^{3x+2}=16.28^{x}-5.98^{x}$;

14. $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$

15. $3^{2x^2+6x-9}+4.15^{x^2+3x-5}=3.5^{2x^2+6x-9}$;

16. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\dfrac{101}{10\left(2-\sqrt{3}\right)}$;

17. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$;

18. $\left(4^{x}-1\right)^{2}+2^{x+1}\left(4^{x}-1\right)=8.4^{x}$;

19. $8.4^{2x}-54.8^{x}+101.4^{x}-54.2^{x}+8=0$;

20. $\left(x^2-3x\right)^{2x-4}\left(x+1\right)^{4-2x}=1$;

21. $\left(x^2-x-1\right)^{\frac{x^2-3x}{x+1}}=\left(x^2-x-1\right)^{\frac{2x-4}{x+1}}$;

22. $\left(x^2-5x+6\right)^{4x^4+3x^3+16}=\left(x^2-5x+6\right)^{23x^2+6x}$;

23. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2}.2^{\frac{x+1}{4-x}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{12\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2}$;

24. $4^{(6-x)^4+(8-x)^4-\frac{29}{2}}-3^{(6-x)^4+(8-x)^4-15}=3^{(6-x)^4+(8-x)^4-14}-2^{2(6-x)^4+2(8-x)^4-30}$;

25. $3^{x^2-5x+5}+4^{x^2-5x+5}=7^{x^2-5x+5}$;

26. $123^{x^2-5x+7}-5^{x^2-5x+7}=118$;

27. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}=2^{x}$;

28. $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{\frac{5x}{x^2+6}}+\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{5x}{x^2+6}}=6^{\frac{5x}{x^2+6}}$;

29. $2^{x^2+x-2}-2^{x^2-4}=992$;

30. $3^{2^{x-3}+1}+5^{2^{x-3}+1}=152^{\frac{2^{x-3}+1}{3}}$;

31. $2^{x^2-3}+2^{3-x^2}=-x^2+4x-2$;

32. $2^{x^5}+4^{x^4}+256^{4}=3.16^{x^3}$;

33. $\left|2^x-17\right|+\left|x^2-10x+24\right|=2^x+10x-x^2-41$.

34. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $(x-2)\left[9^x+(2a-4).3^x+a^2-8a+7\right]=0$ има:

а) единствен корен;

б) два различни корена;

в) три различни корена.

35. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $(a-3).9^x-2.3^{x+1}+a+5=0$ има:

а) два различни положителни корена;

б) няма реални корени;

в) има точно един реален корен.

36. Да се реши уравнението $2^x-a.2^{|x|+1}=a+2$, където a е реален параметър.

Да се решат неравенствата от № 37 до № 76:

37. $3^{2x-1}<11^{3-x}$;

38. $\sqrt{\frac{9}{10}}\left(\frac{9}{10}\right)^{x-1}>\frac{10^{\frac{3}{4}x-1}}{\sqrt{10}}$;

39. $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\leq\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$;

40. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\geq\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

41. $2^{\sqrt{x^2-3x+3}}>2^{\sqrt{x}}$;

42. $5^x-3^{x+1}>2\left(5^{x-1}-3^{x-2}\right)$;

43. $3^{x^2+2}+3^{x^2}\leq 2.5^{x^2+1}$;

44. $2^{x+3}-x^3.2^x\leq 16-2x^3$;

45. $5^{2x}-7^x-35.5^{2x}+35.7^x\leq 0$;

46. $\left(\frac{1}{121}\right)^{1-x}-\left(\frac{1}{169}\right)^{1-x}+11^{2x-3}+13^{2x-3}>0$;

47. $x^2.2^{2x}+9(x+2).2^x+8.x^2\leq(x+2).2^{2x}+9x^2.2^x+8x+16$;

48. $4x+8\sqrt{2-x^2}>4+\left(x^2-2\right).2^x+2x.2^x\sqrt{2-x^2}$;

49. $4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x3^{\sqrt{x}}<2.x^2.3^{\sqrt{x}}+2x+6$;

50. $7^{x-\frac{1}{8}x^2}<7^{1-x}\left(\sqrt[8]{7}\right)^{x^2}+6$;

51. $9^{\sqrt{x^2-3}}+3<28.3^{\sqrt{x^2-3}-1}$;

52. $\sqrt{8+2^{\sqrt{3-x}+1}-4^{\sqrt{3-x}}}+2^{\sqrt{3-x}+1}>5$;

53. $3.7^{2x}+37.140^{x}\le 26.20^{2x}$;

54. $3.16^{x}+2.81^{x}-5.36^{x}<0$;

55. $\left(\sqrt{2}\right)^{3x}+\left(2\sqrt{2}\right)^{x}\ge 2.4^{x}$;

56. $2^{x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}\ge 3^{2x^2-6x+3}$;

57. $6\sqrt[x]{9}-13.\sqrt[x]{6}+6\sqrt[x]{4}\le 0$;

58. $\sqrt{2^{x^2+2x-10}}\ge\left(\sqrt{33+\sqrt{128}}-1\right)^{x}$;

59. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2-6x-4}-\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-1\right)^{x}\ge 0$;

60. $4^{\sqrt[3]{x+17}-\sqrt[3]{x+16}}-7.2^{\sqrt[3]{x+17}-\sqrt[3]{16+x}}+2\ge 0$;

61. $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}<6$;

62. $8.\dfrac{3^{x-2}}{3^{x}-2^{x}}>1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}$;

63. $\sqrt{9^{x}+3^{x}-2}\ge 9-3^{x}$;

64. $\sqrt{2\left(5^{x}+24\right)}-\sqrt{5^{x}-7}\ge\sqrt{5^{x}+7}$;

65. $\dfrac{4-7.5^{x}}{5^{2x+1}-12.5^{x}+4}\le\dfrac{2}{3}$;

66. $\dfrac{2.3^{x+3}-5^{x+3}}{5.3^{x}-3.5^{x}}<1$;

67. $\left(x-2\right)^{x^2-6x+8}>1$;

68. $\left(x^2-x+1\right)^{x-2}>1$;

69. $4^{1+\sqrt{x}}+3.2^{x+\sqrt{x}}\le 2^{2x}$;

70. $\left(4^{x}-1\right)^2+2^{x+1}\left(4^{x}-1\right)<8.4^{x}$;

71. $\left|x+1\right|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}<1$;

72. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}\ge 2^{x}$;

73. $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{x}+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{x}<\left(2\sqrt{2}\right)^{x}$;

74. $2^{x^2-3x}+4^{x^2-3x}+6^{x^2-3x}>56^{\frac{x^2-3x}{2}}$;

75. $\left(\sqrt{3}+1\right)^{x^2}+\left(\sqrt{3}-1\right)^{x^2}<2^{\frac{3}{2}x^2}$;

76. $2^{\frac{4x}{x^2+1}} < 2.5^{\sqrt{x^2+x-1}-1} + 2.5^{-\sqrt{x^2+x-1}+1}$;

77. Да се решат неравенствата:

а) $9^{x+1} + 8a.3^x - a^2 < 0$;

б) $a^2.4^{2x+1} - 65a.4^{x-1} + 1 > 0$;

в) $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x \le 0$,

където a е реален параметър.

78. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x) = 4.9^{-x^2} - 4.3^{-x^2} + 3$ и за кои стойности на x се достига.

§10. Логаритъм. Логаритмична функция. Логаритмични уравнения и неравенства

В този параграф се използват основните понятия, теореми и методи, разгледани в ([M], гл.I, §10).

Задача 1. Да се пресметнат:

а) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\left(\log_{\frac{4}{\sqrt{5}}} 625\right)$; **б)** $\left(\sqrt{3}\right)^{4+\log_{\frac{1}{9}} 625}$;

в) $\log_4 5.\log_5 6.\log_6 7.\log_7 8$; **г)** $\log_8 12 + \log_{\frac{1}{8}} 3$;

д) $\dfrac{\log_{\sqrt[3]{5}} 27}{\log_{25}\sqrt{3}}$; **е)** $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$;

ж) $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$;

з) $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right).\log_{\sqrt{6}+1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \log_{2\sqrt{6}+7}\left(2\sqrt{6}+5\right)$.

Задача 2. Да се сравнят числата:

а) $\log_6 2$ и $\log_5 2$; **б)** $\log_{\frac{1}{7}} 3$ и $\log_{\frac{1}{8}} 3$; **в)** $\log_3 2$ и $\frac{2}{3}$; **г)** $\log_9 80$ и $\log_7 50$; **д)** $\log_{12} 5$ и $\log_{18} 7$; **е)** $\log_6 5 + \log_5 6$ и 2; **ж)** $\log_{100} 99$ и $\log_{101} 100$; **з)** $\log_3^2 5 - \log_3 5$ и 1; **и)** $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8$ и $4{,}4$.

Задача 3. Да се намери:

а) $\log_8 9$, ако $\log_{12} 18 = a$; **б)** $\log_{250} 120$, ако $\log_9 20 = a$ и $\lg 2 = b$; **в)** $\lg 2$ и $\lg 5$, ако $\lg 2.\lg 5 = k$.

Задача 4. Да се намерят всички стойности на реалният параметър m, за които:

а) $\log_m \pi > \log_m 3{,}2$; **б)** $\log_m \frac{1}{\sqrt{2}} > \log_m \frac{1}{2}$.

Задача 5. Да се докаже, че ако $a^2+b^2=7ab$, $a>0$ и $b>0$, то $\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$.

Задача 6. Да се докаже, че ако $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$ и $b\neq 1$, то $\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+\frac{1}{\log_{a^3} b}+\ldots+\frac{1}{\log_{a^n} b}=\frac{n(n+1)}{2}\log_b a$.

Задача 7. Да се докаже, че ако $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$ и $b\neq 1$, $ab\neq 1$, $x>0$ и $x\neq 1$, то $\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_a x+\log_b x}=\log_{ab}\left(\frac{b}{a}\right)$.

Задача 8. Да се докаже, че ако $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $a\neq 1$, то $b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$.

Задача 9. Да се докаже, че $\log_3 2.\log_4 3.\log_5 4\ldots\log_{n+1} n=\log_{n+1} 2$, където $n\in N$.

Задача 10. Да се решат уравненията от № 1 до № 31:

1. $\log_x^3 10-\log_x^2 10-6\log_x 10=0$;

2. $\log_{\frac{x+5}{3}} 3=\log_{\frac{-1}{x+1}} 3$;

3. $\log_{x+1}\left(x^2-3x+1\right)=1$;

4. $\log_{x^3+x}\left(x^2-4\right)=\log_{x^2-6}\left(x^2-4\right)$;

5. $\log_{x^2+6x+8}\left(\log_{2x^2+2x+3}\left(x^2-2x\right)\right)=0$;

6. $\log_9(x+1)-\log_9(1-x)=\log_9(2x+3)$;

7. $2\log_2 x-\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} x=9$;

8. $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$;

9. $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3-\log_4(x+6)^3$;

10. $3^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$;

11. $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$;

12. $\log_2\left(9-2^x\right)=3-x$;

13. $\lg\left(x+\sqrt{5}\right)+16^{2-\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}=27^{2-3\log_3 2}-\lg\left(x-\sqrt{5}\right)$;

14. $\frac{1}{2}\lg\left(x^2-10x+25\right)+\lg\left(x^2-6x+3\right)=2\lg(x-5)+\lg 5$;

15. $\frac{1-\lg^2 x^2}{\lg x-2\lg^2 x}=\lg x^4+5$;

16. $\frac{1+2\log_9 2}{\log_9 x}-1=\log_x 3.\log_3(12-x)$;

17. $\log_3(\lg(2x-14)+\lg(x+12))=1$;

18. $\lg\left(6.5^x-25.20^x\right)=x+\lg 25$;

19. $x^{2\log_3 x}=3x$;

20. $2.4^{\lg x}+5.25^{\lg x}=7x$;

21. $\log_x 3+\log_3 x=\log_{\sqrt{x}} 3+\log_3\sqrt{x}+\frac{1}{2}$;

22. $20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x} x^3-3\log_{\frac{x}{2}} x^2=0$;

23. $\frac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2}+\log_{2x} 2.\log_{\frac{1}{2}} 2x=0$;

24. $2\log_9^2 x = \log_3 x . \log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$;

25. $x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3} - x\log_{\frac{1}{6}}\left(5x^2-2x-3\right) = x^2+2x$;

26. $(x-3)^2\log_2(x-1) + 2\log_{x-1}\sqrt{2} = (x-3)^2\log_{x-1}2 + 2\log_2\sqrt{x-1}$;

27. $\log_{2x+1}\left(5+8x-4x^2\right) + \log_{5-2x}\left(1+4x+4x^2\right) = 4$;

28. $\log_{5x-1}\left(10x^2-7x+1\right) - \log_{2x-1}\left(25x^2-10x+1\right) = 2$;

29. $\frac{1}{3}\log_2(3x-4)^6 . \log_2 x^3 = 8\log_2^2\sqrt{x} + \log_2^2(3x-4)^2$;

30. $\log_2 x . \log_3 x + \log_2 x . \log_5 x + \log_3 x . \log_5 x = \log_2 x . \log_3 x . \log_5 x$;

31. $\log_3\left(6x^2-5x+1\right) - \log_3(2x-1) . \log_3(3x-1) = 1$.

32. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението:

а) $\lg\left[2x^2-4(a-2)x+8+2a\right] = \lg\left(x^2-2ax+a\right)$ има единствен корен;

б) $\log_3\left(9^x+9a^3\right) = x$ има две решения;

в) $\log_2 x^2 = a\sqrt{\log_2 x^4} + a - 1$ има точно четири решения.

33. Да се решат уравненията:

а) $\log_a x + \left|a + \log_a x\right| \log_{\sqrt{x}} a = a\log_x a$;

б) $\left[1+(a+2)^2\right]\log_3\left(2x-x^2\right) + \left[1+(3a-1)^2\right]\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = \log_3\left(2x-x^2\right) + \log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$.

34. Да се решат уравненията:

а) $\log_2 x = 3 - x$;

б) $x\log_3 x = 18$;

в) $x\log_2(x+1) = \log_{\frac{1}{3}} x + 7$;

г) $\log_2\frac{6x}{x^2+2} = \frac{3x^2-6x+6}{x^2+2}$;

д) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{\log_2 x} + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{\log_2 x} = \left(2\sqrt{2}\right)^{\log_2 x}$;

е) $\log_2 8x - \log_2\left(x^2+1\right) = 9^x - 6.3^x + 11$.

35. Дадено е уравнението $(m-2)\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 2m\log_{\frac{1}{2}} x - 1 = 0$. Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които

а) уравнението има два различни корена в интервала $\left(\frac{1}{2};8\right)$;

б) уравнението има поне един корен в интервала $\left(\frac{1}{2};8\right)$;

в) уравнението няма реални корени в интервала $\left(\frac{1}{2};8\right)$.

36. Дадено е уравнението $12\left(a^2+7\right)\log_3\sqrt{x}+\log_x 27=12(a+3)$, където a е реален параметър. Ако корените x_1 и x_2 на уравнението са реални, да се намери най-малката и най-голямата стойност на произведението $x_1 . x_2$.

37. Да се решат неравенствата от № 1 до № 29:

1. $x\log_{\frac{1}{10}}\left(x^2+x+1\right)\geq 0$;

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2-\frac{10}{3}x+1\right)}\leq 1$;

3. $\log_{0,5}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$;

4. $\log_4\left(3^x-1\right).\log_{\frac{1}{4}}\frac{3^x-1}{16}\leq\frac{3}{4}$;

5. $\log_{x^2}(x+1)<1$;

6. $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+18\right)-2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)<0$;

7. $\log_x\frac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>0$;

8. $\log_{-4x^2+12x-8}(4x-5)>0$;

9. $\log_x\frac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>0$;

10. $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}\geq 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$;

11. $\dfrac{\log_5\left(x^2-4x-11\right)^2-\log_{11}\left(x^2-4x-11\right)^3}{2-5x-3x^2}\geq 0$;

12. $\log_2\left(\sqrt{x^2-4x}+3\right)>\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}+1$;

13. $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_2\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\leq 0$;

14. $\lg x+\lg\sqrt{x}+\lg\sqrt[4]{x}+\lg\sqrt[8]{x}+\ldots>1$;

15. $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x)>1$;

16. $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right)\geq 1$;

17. $(\lg x+1)^2<\sqrt{\lg x}\left(\sqrt{\lg x}+1\right)^2$;

18. $\log_2\left(\log_3\frac{x+1}{x-1}\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-1}{x+1}\right)$;

19. $\left(x^2-x+1\right)^{x-2}>1$;

20. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1}-36^x\right)\geq -2$;

21. $\log_2^2\left(x-x^2+2\right)+3\log_{\frac{1}{2}}\left(x-x^2+2\right)+2\leq 0$;

22. $\log_{x+1}\left(x^2+x-6\right)^2\geq 4$;

23. $\sqrt{\log_9\left(3x^2-4x+2\right)+1}>\log_3\left(3x^2-4x+2\right)$;

24. $\sqrt{\log^2_{\sqrt{2}} x+\log_2 x^4-8}>\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x^2}{4}$;

25. $\log_{\frac{1}{4}} x.\log_2\left(\log_{\frac{1}{4}} x+1\right)<\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)+7$;

26. $\log_2\left(-2x^2-8x-6\right)<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x^2+1}}$; **27.** $\log_x\left(2x^2-3x-4\right)<2$;

28. $\log_7\left(6+7^{-x^2+4}\right)\geq x^2-3$; **29.** $\dfrac{1}{\log_4(x-1)}>\dfrac{1}{\log_4\sqrt{x+1}}$.

Задача 38. Да се реши неравенството $\log_{x+a} 2<\log_x 4$, ако $a\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$.

Задача 39. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които всяко реално число x е решение на неравенството $\log_5 5\left(x^2+1\right)\geq\log_5\left(ax^2+4x+a\right)$

Задача 40. Да се реши неравенството:

1) $\log_a(x-2)+\log_a x>1$;

2) $x^{\log_a x}<a$, за $x\neq 1$.

Задача 41. Решете неравенството $\log_p\left(4-x^2\right)>\log_p\left(x^2+5x+6\right)$, ако е известно, че то се удовлетворява за $x=1$. Намерете стойностите на реалния параметър m, за които само по-големият корен на квадратния тричлен $f(x)=x^2-2mx-1$ принадлежи на множеството от решения на даденото логаритмично неравенство.

Задача 42. Да се реши неравенството

$$\log_{|x-a|} b\,.\log_b\left[-x^2+(2a+1)x-a^2-a+2\right]\geq 1,$$

където a и b са реални параметри.

Задача 43. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството $\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right).\log_5\left(x^2+ax+6\right)+\log_a 3\geq 0$ има точно едно решение.

§11. Тригонометрични изрази. Тригонометрични уравнения и неравенства

В този параграф съществено се използват основните тригонометрични тъждества, тригонометричните функции на сбор и разлика на ъгли, преобразуване на тригонометрични изрази и основните методи за решаване на тригонометрични уравнения и неравенства, разгледани в ([M], гл.I, §12).

Задача 1. Да се опростят изразите от № 1 до № 5:

1. $\dfrac{\cos\frac{\pi}{30}.\cos\frac{\pi}{15}+\sin\frac{\pi}{30}.\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30}.\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{30}.\sin\frac{4\pi}{15}}$; **2.** $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$;

3. $\dfrac{\sin\alpha+2\sin(60^\circ-\alpha)}{2\cos(30^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}$; **4.** $\dfrac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}+\mathrm{tg}\frac{5\pi}{36}}{1+\mathrm{tg}\frac{8\pi}{9}.\mathrm{tg}\frac{5\pi}{36}}$;

5. $\dfrac{1-4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

Задача 2. Изчислете без таблица:

1. $\cos 5^\circ.\cos 55^\circ.\cos 65^\circ$; **2.** $\mathrm{tg}20^\circ.\mathrm{tg}40^\circ.\mathrm{tg}60^\circ.\mathrm{tg}80^\circ$;

3. $16\sin 20^\circ.\sin 40^\circ.\sin 60^\circ.\sin 80^\circ$; **4.** $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}$.

Задача 3. Докажете, че:

1. $\dfrac{\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)}{\sin(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)}=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha$;

2. $\sin 200^\circ.\sin 310^\circ+\cos 340^\circ.\cos 50^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3. $\sin 4\alpha+\cos 4\alpha.\mathrm{cotg}2\alpha=\mathrm{cotg}2\alpha$;

4. $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}(\alpha+\beta).\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta$;

5. ако $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$, то $\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\gamma.\mathrm{tg}\alpha=1$;

6. $\dfrac{4\sin^4\frac{\alpha}{4}}{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{4}$;

7. $\dfrac{\sin(80^\circ+\alpha)}{4\sin\left(20^\circ+\frac{\alpha}{4}\right).\sin\left(70^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}=\cos\left(40^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

8. $\cos 3\alpha.\cos 6\alpha.\cos 12\alpha=\dfrac{\sin 24\alpha}{8\sin 3\alpha}$;

9. $\dfrac{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\sin 2\alpha$;

10. $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right).\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$;

11. $\sin(\pi+\alpha).\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right).\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$.

Задача 4. Преобразувайте в произведение изразите от № 1 до № 9:

1. $\frac{\sqrt{2}-\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}$;

2. $\sin x+\sin y+\sin z$, ако $x+y+z=\pi$;

3. $3-4\cos 4x+\cos 8x-8\cos^4 2x$;

4. $2\sin x.\sin y.\cos(x-y)+1-\sin^2 x-\sin^2 y$;

5. $\frac{\sin^2(x+y)-\sin^2 x-\sin^2 y}{\sin^2(x+y)-\cos^2 x-\cos^2 y}$;

6. $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}-2x\right)-\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+2x\right)$;

7. $\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}+\alpha\right)$;

8. $\sin 2x+\cos 4x-\sin 6x$;

9. $\cos 5x+\cos 8x+\cos 9x+\cos 12x$.

Задача 5. Да се решат уравненията от № 1 до № 33:

1. $25\sin^2 x+30\sin x.\cos x+9\cos^2 x=25$;

2. $4\sin^2 x+7\cos^2 x+3\sin 2x-6\cos 2x=1$;

3. $\sin^3 x+\cos^3 x=\cos x$;

4. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$;

5. $\sin\left(\frac{7\pi}{4}+x\right)+\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$;

6. $\cos x.\cos 2x=\cos 3x$;

7. $1-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{2\cos x}{\sin x+\cos x}$;

8. $8\sin x.\cos 2x.\cos x=\sqrt{3}$;

9. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$;

10. $\frac{\cos x}{1+\cos x}.\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\sqrt{3}$;

11. $\mathrm{tg}(3x+45°)-\cos 6x=0$;

12. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$;

13. $1-\sin x=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$;

14. $2\sin x.\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}=4\sin\frac{x}{2}$;

15. $8\cos^4 x-\cos 4x=1$;

16. $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x$;

17. $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=2$;

18. $\sin x+\cos x-1=\sqrt{\sin 2x}$;

19. $\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{cotg} x}=2$;

20. $3\log_2^2 \sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2$;

21. $\log_2 \sin x-\log_2 \cos x-\log_2(1-\operatorname{tg} x)-\log_2(1+\operatorname{tg} x)=1$;

22. $\sin(\pi \operatorname{tg} x)=\cos(\pi \operatorname{tg} x)$;

23. $\sqrt{2}\sin 3x+\sqrt{3}\cos 5x=\sqrt{2}\cos 3x+\sin 5x$;

24. $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$;

25. $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)=\operatorname{cotg}(\pi \operatorname{cotg} x)$;

26. $3\sin^7 x+4\sin^{10} x=7$;

27. $\sin^5 x+\cos^{11} x=\frac{\pi}{3}$;

28. $\sin x+\cos 4x+2\sin 5x=4$;

29. $(\cos 2x-\cos 4x)^2=4+\cos^2 3x$;

30. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$;

31. $\cos^2 x-\cos^4 x=\sin^2 x.\sin 3x-1$;

32. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2 3x=\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x-\frac{1}{2}$;

33. $\cos^2 8x+\cos^2 2x+2=2\cos 8x.\cos 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos x$.

Задача 6. Да се намерят всички стойности на реалния параметър m от интервала $(-1;1)$, за които уравнението $4^{\sin x}+m2^{\sin x}+m^2-1=0$ има реални решения.

Задача 7. Дадено е уравнението $\sin^4 x+\cos^4 x=b\sin 2x+\frac{b}{2}$, където $b>0$. Намерете стойностите на параметъра b, за всяка от които уравнението има решение. Намерете решенията на уравнението за най-малката от тези стойности на параметъра b.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $\sin^2 x-4a\sin x.\cos x+3\cos^2 x-a=0$ има реални решения.

Задача 9. Да се реши уравнението $\sin 2x+2a\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=4a-1$, където a е реален параметър.

Задача 10. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $\dfrac{a\cos x}{2\cos 2x-1}=\dfrac{a+\sin x}{\left(\cos^2 x-3\sin^2 x\right)\operatorname{tg} x}$ има решение.

Задача 11. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $|x|+x^2=\cos x-2^{|x|}+a$ има единствено решение.

Задача 12. Да се намерят всички двойки реални числа, които удовлетворяват уравненията:

а) $x^2+4x\cos(x.y)+4=0$;

б) $\left(\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\dfrac{\sin y}{2}$;

в) $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{cotg}^2 x.\operatorname{cotg}^2 y=3+\sin^2(x+y)$;

г) $\sin^8 x+\cos^8 x+4\sin^2 x.\cos^2 x-1=y^2-\sqrt{\dfrac{7}{2}}\,y+1$.

Задача 13. Да се реши системата:

а) $\left|\begin{array}{l}\operatorname{cotg} x+\sin 2y=\sin 2x\\ 2\sin y.\sin(x+y)=\cos x\end{array}\right.$;

б) $\left|\begin{array}{l}\sin x.\cos 2y=\left(a^2-1\right)^2+1\\ \cos x.\sin 2y=a+1\end{array}\right.$, където a е реален параметър.

Задача 14. Да се решат неравенствата от № 1 до № 15:

1. $\operatorname{cotg} x\le-\sqrt{3}$;
2. $\sin x\ge\dfrac{1}{2}$;
3. $\cos x\ge-\dfrac{1}{2}$;
4. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\cos x<-\dfrac{1}{2}$;
5. $\cos(-2x+2)>\dfrac{1}{2}$;
6. $|\cos x|\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
7. $\operatorname{tg} x+1>0$;
8. $2\cos^2 x+3\cos x-2<0$;
9. $\sin x+\cos x<\sqrt{2}$;
10. $\sin x>\cos x$;
11. $\sin x+\cos 2x>1$;
12. $\sin x-\cos x>0$;
13. $\operatorname{tg} x.(1+\cos 2x)<\cos 2x.\operatorname{tg} 2x$;
14. $\cos^3 x.\cos 3x-\sin^3 x+\cos x.\sin 3x>\dfrac{5}{8}$;
15. $\dfrac{5}{4}.\sin^2 x+\dfrac{1}{4}.\sin^2 2x>\cos 2x$.

Глава III. ГЕОМЕТРИЯ

§1.Основни зависимости между страни и ъгли в триъгълник. Забележителни точки в триъгълника. Еднакви триъгълници

В този параграф съществено се използват основните понятия, теореми и методи, разгледани в ([M], гл.II, §1). Припомняме и следните формули за лице на триъгълник $S=\dfrac{a\,h_a}{2}$; $S=\dfrac{1}{2}a\,b\sin\gamma$; $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ и това, че $0<\sin\gamma\le 1$, $0<\cos\gamma\le 1$.

Задача 1. Да се определи видът на триъгълник според ъглите, ако кой да е негов ъгъл е по-малък от сумата на останалите два.

Задача 2. Съществува ли триъгълник, на който сумата от кои и да са два вътрешни ъгъла е по-малка от $120°$?

Задача 3. Даден е триъгълник ABC с $\angle ABC=45°$. Върху страната BC е взета точка D такава, че $DC=2\,BD$ и $\angle ADC=60°$. Да се намери $\angle ACB$.

Задача 4. Даден е триъгълник ABC с $\angle ACB=135°$. Върху страната AB от A към B и от B към A са нанесени съответно отсечките $AM=AC$ и $BN=BC$. Да се намери $\angle MCN$.

Задача 5. Ъглополовящата BB_1 на ΔABC разделя триъгълника на два равнобедрени триъгълника. Ако $AB=BB_1=B_1C$, да се намерят ъглите на ΔABC.

Задача 6. Точка D е вътрешна за ΔABC такава, че $AD=AB$. Да се докаже, че $AB<AC$.

Задача 7. Върху продължението на най-голямата страна AC на ΔABC е взета точка D (C е между A и D) така, че $CD=CB$. Да се докаже, че $\angle ABD\ge 90°$.

Задача 8. Точките A_1, A_2, …, A_n не лежат на една права. Точките P и Q са различни и притежават свойството $A_1P+A_2P+\ldots+A_nP=$ $=A_1Q+A_2Q+\ldots+A_nQ=d$. Да се намери точка T, за която $A_1T+A_2T+\ldots+A_nT\le d$.

Задача 9. Ако a, b и c са дължини на страните на триъгълник да се докаже, че:

а) $a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc)$;

б) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$;

в) $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)^2\le abc$;

г) $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$.

Задача 10. Ако дължините на страните на разностранен триъгълник образуват геометрична прогресия, да се намери множеството от стойностите на частното на тази прогресия.

Задача 11. Да се докаже, че ако страните на триъгълник удовлетворяват зависимостта $a^2+b^2>5c^2$, то c е дължината на най-малката страна на триъгълника.

Задача 12. Две от височините на триъгълник имат дължини 10 и 20. Да се докаже, че дължината на третата височина е по-малка от 30.

Задача 13. Точка M е вътрешна за ΔABC. Да се докаже, че:

а) $\angle AMB > \angle ACB$;

б) ако S е лицето на триъгълника, то $4S < AM.BC + BM.AC + CM.AB$.

Задача 14. Точките M и N лежат съответно на страните AB и AC на триъгълник ABC така, че $AM = CN$ и $AN = BM$. Да се докаже, че $S_{BMNC} \geq 3S_{\Delta AMN}$.

Задача 15. Върху страните на ΔABC са взети съответно точките A_1, B_1 и C_1. Да се докаже, че лицето на един от триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C е по-малко или равно на $\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$.

Задача 16. Лицата на триъгълниците ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ са равни съответно на S, S_1 и S_2. Ако $AB = A_1B_1 + A_2B_2$, $AC = A_1C_1 + A_2C_2$ и $BC = B_1C_1 + B_2C_2$, да се докаже, че $S \geq 4\sqrt{S_1.S_2}$.

Задача 17. Да се докаже, че ако вътрешните ъглополовящи на триъгълник са по-малки от 1, то лицето му е по-малко от а) 1; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 18. Да се докаже, че в ΔABC $\angle BAC$ е остър точно тогава, когато $m_a > \frac{1}{2}a$.

Задача 19. Да се докаже, че ако дължините на страните на триъгълник са a, b и c, а мерките на ъглите лежащи срещу тях, изразени в радиани, са съответно α, β и γ, то $\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$.

Задача 20. Точка M е външна за ΔABC, но вътрешна за $\angle ACB$. Да се докаже, че ако разстоянията ѝ до BC, AC и AB са съответно x_a, x_b и x_c, то $\frac{x_a}{h_a} + \frac{x_b}{h_b} - \frac{x_c}{h_c} = 1$.

Задача 21. Точка M е вътрешна за ΔABC. Разстоянията ѝ до BC, AC и AB са съответно x_a, x_b и x_c. Да се докаже, че:

а) ако $h_a < h_b < h_c$, то $h_a < x_a + x_b + x_c < h_c$;

б) $\frac{h_a}{x_a}+\frac{h_b}{x_b}+\frac{h_c}{x_c}\ge 9$. При кое положение на точка M се достига равенството?

Задача 22. Точките A, B и M лежат на една права, като B е между A и M. Построени са равностранните триъгълници ABC и BMN така, че точките C и N лежат в една и съща полуравнина относно правата AB. Правите AN и BC се пресичат в точка Q, а правите MC и BN в точка P. Да се определи видът на ΔBPQ според страните му.

Задача 23. В триъгълник ABC са построени ъглополовящите AA_1 и BB_1 ($A_1\in BC$, $B_1\in AC$). Ако симетричната точка на A_1 относно BB_1 съвпада със симетричната точка на B_1 относно AA_1, да се намери $\angle ACB$.

Задача 24. В триъгълник ABC AD е ъглополовяща ($D\in BC$). Права, минаваща през D пресича страната AC в точка E така, че $\angle CDE=\angle BAC$. Да се докаже, че $BD=DE$.

Задача 25. Точка O е вътрешна за равностранния ΔABC. Построен е равностранния ΔOBD така, че точките A и D лежат в различни полуравнини относно правата OB. Да се докаже, че $CD=OA$.

Задача 26. От върха C на ΔABC са спуснати перпендикулярите CM и CP съответно към ъглополовящите на външните ъгли при върховете A и B (M и P са върху съответните ъглополовящи).

а) Да се докаже, че $MP=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

б) Ако правата MP пресича AC и BC съответно в точките E и F и $AB=12$ см, да се намери EF.

Задача 27. Отсечката BL ($L\in AC$) е ъглополовяща в ΔABC. Ако P е ортогоналната проекция на върха C върху правата BL, да се докаже, че точката P лежи на правата, минаваща през средите на страните AC и BC на ΔABC.

Задача 28. В ΔABC ($AC\ne AB$) ортогоналните проекции на върховете B и C върху ъглополовящата AL ($L\in BC$) са означени съответно с P и Q, а с M е означена средата на BC. Да се докаже, че триъгълник MPQ е равнобедрен.

Задача 29. В правоъгълен ΔABC ($\angle C=90^\circ$) е построена височината CD. Ъглополовящите на $\angle CAB$ и $\angle BCD$ се пресичат в точка E, а ъглополовящите на $\angle ABC$ и $\angle ACD$ - в точка F. Да се докаже, че EF е успоредна на AB.

§2. Успоредни прави и ъгли, свързани с тях. Успоредник. Трапец.

Задача 1. В ΔABC през пресечната точка O на ъглополовящите е прекарана права, успоредна на BC, която пресича AB и AC съответно в точките B_1 и C_1. Да се докаже, че $B_1C_1=BB_1+CC_1$.

Задача 2. Върху катетите на правоъгълния $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) извън него са построени квадратите $CBDE$ и $CKHA$. Ако ортогоналните проекции на точките D и H върху правата AB са съответно N и M да се докаже, че $HM + DN = AB$.

Задача 3. Страните на успоредник са равни съответно на 17 и 15. Да се намерят диагоналите на четириъгълника с върхове пресечните точки на вътрешните ъглополовящи на успоредника.

Задача 4. Върху страните AB и BC на триъгълник ABC, външно за него са построени квадратите $ABDE$ и $BCKT$. Ако медианата BP на $\triangle ABC$ е равна на m, да се намери дължината на отсечката DT.

Задача 5. Страната AC на $\triangle ABC$ е разделена на три равни части от точките M и N (M е между A и N). През точките M и N са построени прави, успоредни на AB, които пресичат BC съответно в точките P и Q. Ако $AB = 24$ да се намерят дължините на отсечките MP и NQ.

Задача 6. За изпъкналия четириъгълник $ABCD$ правата AB е перпендикулярна на DC. Ако дължината на отсечката, съединяваща средите на страните AD и BC, е равна на 8, да се намери дължината на отсечката, съединяваща средите на диагоналите на четириъгълника.

Задача 7. Права g пресича страните AB и BC на $\triangle ABC$. Ако разстоянията от върховете на триъгълника до g са съответно a, b и c да се намери разстоянието от медицентъра на триъгълника до g.

Задача 8. Отсечките AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC$ и $B_1 \in AC$) са височини в остроъгълния $\triangle ABC$ с ортоцентър H, а M, N и P са среди съответно на AB, AH и BH. Да се докаже, че $\triangle MPA_1 \cong \triangle B_1NM$.

Задача 9. Точките M и N лежат върху страните BC и AC на $\triangle ABC$, а отсечките AM и BN се пресичат в точка O така, че $AO:OM = BO:ON = 2:1$. Да се докаже, че AM и BN са медиани на $\triangle ABC$.

Задача 10. Даден е $\triangle ABC$, в който M и N са средите съответно на AC и BC, а точките P и Q делят AB на три равни части, като P е между A и Q. Да се докаже, че:

а) ако $MP = NQ$, то $\triangle ABC$ е равнобедрен;

б) ако $MQ = NP$, то $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Задача 11. Диагоналите на квадрата $ABCD$ се пресичат в точка O. Нека M и N са средите съответно на отсечките OD и BC. Да се докаже, че $\triangle AMN$ е равнобедрен правоъгълен.

Задача 12. Да се докаже, че във всеки трапец ъглополовящите на ъглите, прилежащи на едното бедро, се пресичат под прав ъгъл в точка, лежаща на средната основа на трапеца.

Задача 13. Даден е изпъкналия четириъгълник $ABCD$ диагоналите AC и BD, на който се пресичат в точка O. Да се докаже, че $AB \| CD$ точно тогава, когато $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC}$.

Задача 14. Всеки от диагоналите на изпъкнал петоъгълник отсича от него триъгълник с лице 1. Да се намери лицето на петоъгълника.

Задача 15. В трапеца $ABCD$ всяка от основите е продължена в две посоки. Ъглополовящите на външните ъгли при A и D се пресичат в точка K, а ъглополовящите на външните ъгли при B и C - в точка E. Ако $KE = a$, да се намери периметърът на трапеца.

Задача 16. Даден е равнобедрения трапец $ABCD$ с основи AB и CD. Ако O е пресечната точка на диагоналите и $\angle AOB = 60°$, определете вида на триъгълника с върхове средите на отсечките AO, DO и BC.

Задача 17. Върху диагонала BD на правоъгълника $ABCD$ е взета точка P. Точка M лежи на правата PC и $PM = PC$. От точка M са спуснати към AB и AD перпендикулярите ME ($E \in AB$) и MF ($F \in AD$). Да се докаже, че:

а) AM е успоредна на BD и EF е успоредна на AC;

б) точките F, E и P лежат на една права.

Задача 18. Да се докаже, че ако две от ъглополовящите на триъгълник са равни, то той е равнобедрен.

Задача 19. Във вътрешността на квадрат $ABCD$ са взети точки P и Q така триъгълниците APB и CDQ са равностранни. Ако $AP \cap DQ = E$ и $BP \cap CQ = F$:

а) да се определи вида на четириъгълника $EPFQ$;

б) да се докаже, че отсечките AC, BD, EF и PQ минават през една точка.

Задача 20. Върху страните на успоредник $ABCD$ външно са построени равностранните триъгълници ABM, BCN, CDP и DAQ. Да се определи видът на четириъгълника:

а) $MNPQ$; б) с върхове центровете на равностранните триъгълници.

Задача 21. AL ($L \in BC$) е ъглополовяща на равнобедрения ΔABC ($AC = BC$), точка D е среда на AB. През L са построени прави, перпендикулярни на AB и на AL, които пресичат правата AB съответно в точките E и F. Да се докаже, че $AF = 4DE$.

Задача 22. Да се докаже, че ако в един трапец:

а) ъглополовящите на ъглите, прилежащи на едната основа, се пресичат в точка от втората основа, то втората основа е равна на сбора от бедрата;

б) една от основите е равна на сбора от бедрата, то ъглополовящите на ъглите, прилежащи на другата основа, се пресичат в точка от първата основа.

Задача 23. Даден е трапец $ABCD$ ($AB || CD$). Ако основите и бедрата му са равни съответно на a, b, c и d и ъглополовящите на ъглите, прилежащи на едното бедро се пресичат в точка M, а ъглополовящите на ъглите, прилежащи на другото бедро се пресичат в точка N, да се намери дължината на отсечката MN.

Задача 24. За трапеца $ABCD$ с основи AB и CD, $AB > CD$ е известно, че $AD = AB = BC$. Нека M е такава точка от бедрото AD, че триъгълникът ABM и четириъгълникът $MBCD$ имат равни лица. Да се докаже, че те имат и равни периметри.

Задача 25. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ и точки M и N съответно върху страните AB и BC са такива, че всяка от отсечките AN и CM разделя четириъгълника на две равнолицеви части. Докажете, че:

а) $ACNM$ е трапец;

б) MN разполовява диагонала BD.

Задача 26. В трапеца $ABCD$ основата AB е по-голяма от CD. Върху AB съществува такава точка M, за която триъгълниците AMD, DMC и CMB са равнолицеви. Бедрата AD и BC са продължени до пресичането им в точка F. Да се докаже, че $S_{\Delta DCF} = \frac{1}{3} S_{ABCD}$.

Задача 27. Нека M е точка, която лежи вътре в трапеца $ABCD$ ($AB || CD$, $AB > CD$) или върху някоя от страните му. Да се докаже, че $S_{ACD} \le S_{AMB} + S_{CDM} \le S_{ABC}$.

Задача 28. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха B. Върху катета AB е дадена точка M такава, че $AM = BC$, а върху катета BC - точка N такава, че $CN = MB$. Намерете ъгъла между правите AN и CM.

§3.Окръжност. Взаимни положения на права и окръжност. Взаимни положения на две окръжности. Окръжност и ъгъл. Окръжност и триъгълник

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([M], гл.II, §3).

Задача 1. През точка M, външна за окръжността $k(O, r)$ са построени допирателните MA и MB ($A \in k$ и $B \in k$). Да се докаже, че:

а) MO е ъглополовяща за $\angle AMB$ и $\angle AOB$;

б) правата MO е симетрала за отсечката AB;

в) геометричното място на центровете на всички окръжности, минаващи през точките A и B е правата MO;

г) геометричното място на центровете на всички окръжности, вписани в $\angle AMB$ е лъча $MO^{\to}$ без точка M.

Задача 2. Дадени са окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, за които $r_1 > r_2$ и $r_1 + r_2 < |O_1O_2|$. Общите външни допирателни на двете окръжности се допират до k_1 и k_2 съответно в точките A, B и C, D. Да се докаже, че:

а) четириъгълникът $ABCD$ е равнобедрен трапец;

б) правите AB, DC и O_1O_2 се пресичат в една точка;

в) правата O_1O_2 е симетрала на отсечките AD и BC.

Задача 3. Дадени са окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, за които $r_1 > r_2$ и $|O_1O_2| > r_1 + r_2$. Общите вътрешни допирателни на k_1 и k_2 съответно в точките A, C и B, D. Да се докаже, че:

а) правите AC, BD и O_1O_2 се пресичат в една точка;

б) правата O_1O_2 е симетрала на отсечките AB и CD;

в) четириъгълникът $ABCD$ е равнобедрен трапец.

Задача 4. Дадени са външните една за друга окръжности $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, като $r_1 > r_2$. Да се докаже, че отсечките, които двете общи външни допирателни отсичат от правите на общите вътрешни допирателни, са равни на външните допирателни.

Задача 5. Окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се допират външно в точка M. Общата им вътрешна допирателна пресича общата им външна допирателна AB в точка N. Да се намерят $\angle AMB$ и $\angle O_1NO_2$.

Задача 6. Вписаната в ΔABC окръжност се допира до BC, AC и AB съответно в точките A_1, B_1 и C_1. Ако дължините на страните на ΔABC са съответно a, b и c, да се намерят дължините на отсечките AC_1, BA_1 и CB_1.

Задача 7. Външно вписана за ΔABC окръжност се допира до BC и правите AB и AC съответно в точките N, P и Q. Ако дължините на страните на триъгълника са съответно a, b и c, да се докаже, че:

а) $AP = AQ = p$; $BN = p - c$ и $CN = p - b$, където p е полупериметъра на ΔABC;

б) ако M е допирната точка на вписаната в ΔABC окръжност с BC, то отсечките MN и BC имат обща среда, като $MN = |b - a|$.

Задача 8. За ΔABC отсечките CL, CM и CH са съответно ъглополовяща, медиана и височина. Ако $AC \neq BC$, да се докаже, че точката L е между точките M и H.

Задача 9. Височината, ъглополовящата и медианата, излизащи от един и същи връх на триъгълник, разделят съответния ъгъл на равни части. Да се намерят ъглите на триъгълника.

Задача 10. Върху окръжност са взети в посоченият ред точките A, C_1, B, A_1, C и B_1. Да се докаже, че:

а) ако правите AA_1, BB_1 и CC_1 са ъглополовящи на ъглите на $\Delta A_1B_1C_1$, то $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$ и $CC_1 \perp AB$;

б) ако $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$ и $CC_1 \perp AB$, то AA_1, BB_1 и CC_1 са ъглополовящи на ъглите на $\Delta A_1B_1C_1$.

Задача 11. Точките M, N и P са среди съответно на страните BC, AC и AB на ΔABC. Да се докаже, че центърът на описаната около ΔABC окръжност е ортоцентър за ΔMNP.

Задача 12. Даден е остроъгълен ΔABC с ортоцентър H и център на описаната окръжност O. Да се докаже, че разстоянието от H до връх на триъгълника е два пъти по-голямо от разстоянието от O до срещулежащата страна на този връх.

Задача 13. Даден е остроъгълен ΔABC с медицентър G, ортоцентър H и център на описаната окръжност O. Да се докаже, че G лежи на OH и $OG:GH=1:2$.

Задача 14. Докажете, че средите на страните на триъгълник, петите на височините и средите на отсечките, съединяващи ортоцентъра с върховете на триъгълника, лежат на една окръжност.

Задача 15. Отсечката CD е височина в остроъгълния ΔABC с ортоцентър H и център на описаната окръжност O. Ако M е средата на страната AB, докажете, че:

а) ако H е средата на височина CD, то $OM=\frac{1}{4}CD$;

б) ако $OM=\frac{1}{4}CD$, то H е средата на височина CD.

Задача 16. Отсечката CD е височина към основата на равнобедрения ΔABC. Около триъгълника е описана окръжност с център O и радиус R. Докажете, че:

а) ако ортоцентърът на ΔABC е средата на височината CD, то $OD=\frac{1}{3}R$;

б) ако $OD=\frac{1}{3}R$, то ортоцентърът на ΔABC е средата на височината CD.

Задача 17. Отсечките CM, CL и CD са съответно медиана, ъглополовяща и височина към страната AB в ΔABC. Ако ъглите на триъгълника са съответно α, β и γ и $AC\neq BC$, да се докаже, че:

а) ако $\gamma=90^\circ$, то $CL^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\angle MCD$ и $\angle MCL=\angle DCL=\frac{|\beta-\alpha|}{2}$;

б) ако $CL^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\angle MCD$, то $\angle C=90^\circ$ и $\angle MCL=\angle DCL=\frac{|\beta-\alpha|}{2}$.

Задача 18. Отсечката CD е височина в ΔABC с $\angle BAC<90^\circ$, $\angle ABC<90^\circ$ и $\angle BAC\neq\angle ABC$. Около ΔABC е описана окръжност с диаметър CM. Ако правата CD пресича описаната окръжност в точка N, докажете, че четириъгълникът $ABMN$ е равнобедрен трапец.

Задача 19. Точката D е средата на основата AB на равнобедрения ΔABC, а точка M лежи на отсечката AD. Вписаните в ΔAMC и ΔBMC окръжности се допират до CM съответно в точките P и Q.

а) Докажете, че $PQ=MD$.

б) Намерете отношението $AM : BM$, ако $PQ = \frac{2}{5} AB$.

Задача 20. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \| CD$) вписаните окръжности в триъгълниците ABC и ACD се допират до диагонала AC съответно в точките P и Q. Намерете:

а) PQ, ако $AB = 10$, $CD = 6$ и $BC = 7$;

б) бедрото на трапеца, ако $AB = 8$, $CD = 4$ и $PQ = 2$.

Задача 21. Ако радиусите на външно вписаните окръжности за ΔABC са съответно r_a, r_b и r_c, докажете, че:

а) $S_{\Delta ABC} = (p-a)r_a = \sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$;

б) $r_a = p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$;

в) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$;

г) $R.r_a = \frac{abc}{4(p-a)}$;

д) $r_a + r_b + r_c - r = 4R$.

§4.Вписан четириъгълник. Описан четириъгълник

В този параграф съществено се използват разгледаните в ([M], гл.II, §4) понятия и теореми.

Задача 1. Върху окръжност с център O са дадени последователно точките A, B, C и D, като $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = 60^\circ$. Да се докаже, че средите на отсечките OA, OD и BC са върхове на равностранен триъгълник.

Задача 2. Да се докаже, че точките, симетрични на ортоцентъра на остроъгълен триъгълник спрямо страните му, лежат на описаната около триъгълника окръжност.

Задача 3. AA_1, BB_1 и CC_1 са височини в остроъгълният ΔABC. Ако ъглите на триъгълника са съответно α, β и γ, намерете ъглите на триъгълниците A_1B_1C, A_1BC_1, AB_1C_1 и $A_1B_1C_1$.

Задача 4. Диагоналите на вписан в окръжност четириъгълник са взаимно перпендикулярни. През върховете му са построени допирателни към окръжността. Да се докаже, че пресечните точки на тези допирателни лежат на една окръжност.

Задача 5. Дължините на бедрата на трапец са 5 см и 3 см. В трапеца може да се впише окръжност. Средната основа на трапеца го разделя на части, лицата на които се отнасят тъй както $7:13$. Намерете височината на трапеца.

Задача 6. В ΔABC CL е ъглополовяща, а точките O, O_1 и O_2 са съответно центровете на описаните окръжности около ΔABC, ΔALC и ΔBLC. Ако ъглите на ΔABC са съответно α, β и γ като $\beta > \alpha$, да се намерят ъглите на триъгълниците OO_1O_2, AO_1O и BO_2O.

Задача 7. Даден е четириъгълник вписан в окръжност. През средата на всяка от страните му е построен перпендикуляр към срещулежащата страна. Да се докаже, че четирите перпендикуляра се пресичат в една точка.

Задача 8. Точка M лежи на описаната около триъгълник ABC окръжност. Да се докаже, че петите на перпендикулярите, спуснати от тази точка към правите AB, BC и AC, лежат на една права (права на Симсън).

Задача 9. Даден е ΔABC с $\angle ABC > 90^\circ$. Отсечката CM е диаметър на опасаната около ΔABC окръжност k, а точка N лежи на k така, че $MN \| AB$. Да се докаже, че правата CN е перпендикулярна на правата AB.

Задача 10. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност k, а точка M лежи на дъгата $\overset{\frown}{BC}$. Ъглополовящите на $\angle AMB$ и $\angle CMD$ пресичат k съответно в точките P и Q. Да се докаже, че $AB \| CD$ точно тогава, когато $\angle PMQ = 90^\circ$.

Задача 11. Точките P и Q лежат съответно на страните AB и AC на равностранния ΔABC така, че $AP = CQ$. Ако CP пресича BQ в точка M, докажете, че около четириъгълника $APMQ$ може да се опише окръжност.

Задача 12. Точките P и Q лежат съответно на страните AB и AC на равностранния ΔABC така, че $AP = CQ$, а M е пресечната точка на правите CP и BQ. Докажете, че $AM \perp BQ$ точно тогава, когато $AP = \frac{1}{3}AB$.

Задача 13. Точките P и Q лежат съответно на страните AB и AC на равностранния ΔABC така, че $AP = CQ$, а M е пресечната точка на правите CP и BQ. Докажете, че $AP = \frac{2}{3}AB$ точно тогава, когато $\angle AMB = 150°$.

Задача 14. Точката M лежи на страната AB на ΔABC, а точките O, O_1 и O_2 са центровете на описаните съответно около ΔABC, ΔAMC и ΔBMC окръжности. Докажете, че:

а) около четириъгълника O_1OO_2C може да се опише окръжност;

б) $AC = BC$ точно тогава, когато $O_1C = O_2C$.

Задача 15. Даден е триъгълник ABC. Външно за него са построени равностранните триъгълници BCA_1, ACB_1 и ABC_1. Докажете, че:

а) $AA_1 = BB_1 = CC_1$;

б) правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка P;

в) окръжностите, описани около равностранните триъгълници, се пресичат в точка P;

г) ако O_1, O_2 и O_3 са центровете на описаните окръжности, то $\Delta O_1O_2O_3$ е равностранен.

Задача 16. Точка O е центърът на вписаната в ΔABC окръжност, а точката O_1 - центърът на външно вписаната за страната BC окръжност. Да се докаже, че средата на отсечката OO_1 лежи на описаната около ΔABC окръжност.

Задача 17. Даден е тъпоъгълният ΔABC с $\angle C > 90°$ и височини AA_1, BB_1 и CC_1. Да се докаже, че върхът C е център на вписаната в $\Delta A_1B_1C_1$ окръжност, а ортоцентърът на ΔABC и върховете A и B са центрове на външно вписаните за $\Delta A_1B_1C_1$ окръжности.

Задача 18. Даден е четириъгълникът $ABCD$ със страни $AB = a$ и $CD = c$ ($a > c$). Точките P и Q лежат съответно на страните BC и AD така, че четириъгълникът $ABPQ$ е описан около окръжност. Периметрите на четириъгълниците $ABPQ$ и $QPCD$ са съответно $2p_1$ и $2p_2$. Докажете, че в четириъгълника $QPCD$ може да се впише окръжност точно тогава, когато $p_1 - p_2 = a - c$.

Задача 19. Диагоналите на четириъгълника $ABCD$ се пресичат в точка O, а точките A_0, B_0, C_0 и D_0 са ортогоналните проекции на O съответно върху правите AB, BC, CD и DA. Докажете, че:

а) ако около четириъгълникът $ABCD$ може да се опише окръжност, то в четириъгълника $A_0B_0C_0D_0$ може да се впише окръжност;

б) ако O лежи на някоя от ъглополовящите на четириъгълника $A_0B_0C_0D_0$, то около четириъгълника $ABCD$ може да се опише окръжност.

Задача 20. Даден е остър ъгъл $\angle(p,q)$. В ъгъла са вписани две непресичащи се окръжности k_1 и k_2, на които общата вътрешна допирателна е перпендикулярна на рамото p. Построени са другите две допирателни t_1 и t_2 към двете окръжности, перпендикулярни на рамото p. Намерете лицето на четириъгълника, определен от t_1 и t_2 и раменете p и q, ако страните му върху раменете p и q имат дължини a и b.

Задача 21. В делтоида $ABCD$ ($AB = AD$) е вписана окръжност k. Докажете, че правите, определени от допирните точки на k със срещуположните страни на делтоида, минават през пресечната точка на диагоналите му.

Задача 22. Около четириъгълник може да се опише окръжност. Докажете, че ако диагоналите му са равни, то той е равнобедрен трапец.

Задача 23. Вписаната в четириъгълник $ABCD$ окръжност се допира до AB, BC, CD и DA съответно в точките M, P, N и Q. Да се докаже, че ако $MP \perp NQ$, то около $ABCD$ може да се опише окръжност.

Задача 24. Даден е ъгъл с връх A. Върху едното му рамо са взети точките B и C ($AB < AC$), а върху другото точките D и E ($AD < AE$). Ако $BE \cap CD = F$, докажете, че окръжностите, описани около триъгълниците ADC, ABE и DFE минават през една точка.

§5.Подобни триъгълници.
Свойства на ъглополовящите в триъгълника

В този параграф съществено се използват разгледаните в ([M], гл.II, §5) понятия и теореми.

Задача 1. Около четириъгълник е описана окръжност с диаметър един от диагоналите му. Докажете, че ортогоналните проекции на срещуположните двойки страни върху другия диагонал са равни.

Задача 2. В трапеца $ABCD$ през пресечната точка на диагоналите му O е прекарана права успоредна на основите му AB и CD, която пресича бедрата в точките M и N. Ако $AB = a$ и $CD = b$, намерете дължината на отсечката MN.

Задача 3. Даден е трапец $ABCD$. Средата S на голямата основа AB е съединена с краищата на малката основа CD. Правата AC пресича SD в точка M, BD пресича SC в точка N, а MN пресича AD и BC съответно в точките P и Q.

а) Докажете, че $MN \parallel CD$;

б) $PM = MN = NQ$;

в) Намерете MN, ако $AB = a$ и $CD = b$.

Задача 4. За ΔABC $AB = 15$, $BC = 13$ и $AC = 14$. Построена е права успоредна на AB така, че периметърът на получения трапец е равен на 39. Намерете лицето на трапеца.

Задача 5. Точка I е център на вписаната в ΔABC окръжност. Ако $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и CC_1 е ъглополовяща в ΔABC, намерете:

а) отношението $IC : IC_1$;

б) дължината на отсечката AI.

Задача 6. Да се докаже, че във всеки триъгълник произведението на две от страните му е равно на произведението от височината към третата му страна и диаметъра на описаната около него окръжност.

Задача 7. Даден е равнобедрен трапец с дължина на основите и бедрото съответно a, b и d ($a > b$). Ако диагоналът му е равен на a, докажете, че $d^2 = a^2 - ab$.

Задача 8. Да се докаже, че за триъгълник $\alpha = 2\beta$ точно тогава, когато $a^2 = b^2 + bc$.

Задача 9. Точка H е ортоцентър на ΔABC. Ако $S_{\Delta AHB} = \sqrt{6}$, а разстоянията от центъра на описаната около ΔABC окръжност до AC и BC са съответно $\sqrt{2}$ и 1, намерете $\angle ACB$.

Задача 10. Даден е правоъгълен ΔABC ($\angle BAC = 90^\circ$). Точка M е среда на AB, а точката N дели вътрешно BC в отношение $2:1$, считано от C. Ако CM пресича AN в точка P, намерете отношенията $CP : CM$ и $AP : AN$.

Задача 11. Даден е успоредник $ABCD$. Точка E е среда на DC, а F - среда на BC. Правите AE и DF се пресичат в точка M. Намерете в какво отношение точка M дели вътрешно всяка от отсечките DF и AE, считано съответно от D и A.

Задача 12. В ΔABC AM е медиана, а N дели AB в отношение $\frac{2}{3}$, считано от A. Правите AM и CN се пресичат в точка P. Намерете отношенията $PN : PC$ и $AP : PM$.

Задача 13. За равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \| CD$) $AB = 14$, $DC = 6$ и диаметърът на вписаната окръжност е равен на 8. Намерете разстоянието между допирните точки на вписаната окръжност с бедрата на трапеца.

Задача 14. Медицентърът на равнобедрен триъгълник лежи на вписаната в него окръжност.

а) Ако дължините на основата и бедрото са съответно a и b, а r е радиус на вписаната в триъгълника окръжност, докажете, че $5a^2 + 4b^2 = 180r^2$.

б) Намерете r, ако периметърът на триъгълника е корен на уравнението $\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = x^2 - 8x + 17$.

Задача 15. В ΔABC CL е ъглополовяща. Върху BC е взета точка M такава, че $BM = BL$. Ако $CL = \ell$ и $AC + AL = m$, намерете CM.

Задача 16. Дадени са окръжност k и точка C вън от нея. Построени са допирателните CA и CB към k (Точките A и B лежат на k). Точка M е произволна точка от k, а MD, ME и MK перпендикуляри съответно към правите AB, CA и CB. Точките D, E и K лежат съответно върху AB, CA и CB.) Докажете, че $MD^2 = ME.MK$.

Задача 17. Две окръжности се пресичат в точките A и B. Построени са допирателните към тях в точка A, които пресичат окръжностите в точките C и D. Докажете, че:

а) AB е средно геометрична на BD и BC;

б) точките A, B и средите на AD и AC лежат на една окръжност.

Задача 18. Върху страната AC на ΔABC е взета точка D и през нея са прекарани прави, успоредни съответно на AB и BC, които пресичат BC в точка E, а AB в точка F. Ако лицата на триъгълниците AFD и DEC са съответно S_1 и S_2, намерете лицето на успоредника $FBED$.

Задача 19. Даден е трапец $ABCD$, за който $AB \parallel CD$ и $AB = a$, $CD = b$, като $a > b$. Върху правата CD намерете точка M такава, че правата AM да разделя трапеца на две равнолицеви части.

Задача 20. Дадена е окръжност k с център точката O. Хордите CD и EF минават през средата S на хордата AB. Хордите ED и CF пресичат AB съответно в точките N и M, като точките върху k са в реда E, B, D, F, A. Докажете, че $MS = SN$.

Задача 21. Дадени са окръжностите $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ като $O_1O_2 > r_1 + r_2$. През точка O_1 са построени допирателни към k_2, които пресичат k_1 в точките A и B. През O_2 са построени допирателни към k_1, които пресичат k_2 в точките C и D. Докажете, че $AB = CD$.

Задача 22. Две окръжности с радиуси r и R се допират външно. Намерете разстоянието от допирната им точка до общата им външна допирателна.

Задача 23. Даден е ΔABC с дължини на страните съответно a, b и c като $a > b > c$ и точка O вътрешна за триъгълника. Правите AO, BO и CO пресичат страните BC, AC и AB съответно в точките P, Q и R. Докажете, че $OP + OQ + OR < a$.

Задача 24. В триъгълник ABC с лице 1 е взета точка M от медианата BK такава, че $MK = \frac{1}{4}BK$. Правата AM пресича страната BC в точка L. Намерете лицето на ΔALC.

Задача 25. В ΔABC $AC = b$, а $BC = a$. През върха B е прекарана права, успоредна на ъглополовящата на $\angle ACB$ и пресичаща правата AC в точка D. Нека E е средата на отсечката BD. Намерете в какво отношение правата AE дели лицето на ΔABC.

Задача 26. Даден е разностранен ΔABC. Ако AD е ъглополовяща на триъгълника, $AB - BD = a$ и $AC + CD = b$, намерете дължината на AD.

Задача 27. В ΔABC ъглополовящата CD и медианата BE са перпендикулярни. Ако $CD = \ell$ и $BE = m$, намерете лицето на триъгълника.

§6.Решаване на правоъгълен триъгълник.
Метрични зависимости в правоъгълен триъгълник.
Метрични зависимости между отсечки в окръжността

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([М], гл.II, §6) .

Задача 1. Хипотенузата на правоъгълен триъгълник е 12, а височината към нея 4 см. Да се намерят тангенсите на острите ъгли на триъгълника.

Задача 2. Да се намерят радиусите на описаната и на вписаната окръжности за равнобедрен триъгълник, който има периметър $2p$ и ъгъл при основата α.

Задача 3. В окръжност с център O и радиус R е вписан остроъгълен триъгълник с ъгли α, β и γ и ортоцентър H. Намерете разстоянията:

а) от O до страните на триъгълника;

б) от H до върховете на триъгълника.

Задача 4. Общата допирателна на две външно допиращи се окръжности образува с централата им ъгъл α. Да се намери отношението на радиусите на тези окръжности.

Задача 5. В ΔABC са прекарани височините AA_1, BB_1 и CC_1. Да се изразят чрез страните и ъглите на ΔABC страните на $\Delta A_1B_1C_1$.

Задача 6. Окръжността $k(O,r)$ е външно вписана за ΔABC и се допира до страната му BC. Да се намерят r, AO, BO и CO, ако периметърът на триъгълника е $2p$, а ъглите му са α, β и γ.

Задача 7. Вписаната в ΔABC окръжност има радиус r и се допира до BC, AC и AB съответно в точките A_1, B_1 и C_1. Да се изразят чрез r и ъглите на триъгълника α, β и γ страните на $\Delta A_1B_1C_1$.

Задача 8. Голямата основа на трапец е a, височината му е h, а ъглите при голямата основа са α и β. Да се намери периметъра на трапеца.

Задача 9. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \| CD$) диагоналът BD е перпендикулярен на бедрото AD, а основите му са равни на a и b ($a > b$). Намерете лицето на трапеца.

Задача 10. В правоъгълен триъгълник ABC ($\angle C = 90°$) е вписана полуокръжност, на която центърът O лежи на хипотенузата. Намерете радиуса на полуокръжността, ако $AO = 3$ см, $BO = 4$ см.

Задача 11. Вписаната в триъгълник ABC окръжност се допира до страната му AB в точка C_1. Ако $\angle ACB = \gamma$, да се докаже, че $S_{\Delta ABC} = AC_1 . BC_1 . \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$.

Задача 12. Радиусите на две пресичащи се окръжности са равни на 13 и 15, а дължината на общата им хорда е 24. Намерете разстоянието между центровете на двете окръжности и дължината на общата им външна допирателна .

Задача 13. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с височини AA_1, BB_1 и CC_1 и ортоцентър H. Докажете, че:

а) $AH.HA_1 = BH.HB_1 = CH.HC_1$;

б) $CC_1.HC_1 = AC_1.BC_1$

Задача 14. AA_1 и BB_1 са медиани в ΔABC, а M е медицентърът му. Да се докаже, че точките M, A_1, B_1 и C лежат на една окръжност, точно тогава, когато $a^2+b^2=2c^2$.

Задача 15. В правоъгълният триъгълник ABC ($\angle A = 90°$) е прекарана височината AD и правите $DM \perp AB$ ($M \in AB$) и $DN \perp AC$ ($N \in AC$). Докажете, че $\dfrac{BM}{AM} = \dfrac{AN}{NC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Задача 16. В равнобедреният ΔABC ($AC = BC$) бедрото има дължина a. Правата на ъглополовящата AN ($N \in BC$) пресича описаната около триъгълника окръжност в точка K така, че $AN = 3NK$. Намерете лицето на ΔABC.

Задача 17. Нека k_1 и k_2 са концентрични окръжности с център O, радиусите на които са съответно R_1 и R_2, като $R_1 < R_2$. През произволна точка M от k_1 е прекарана права ℓ, неминаваща през O и пресичаща k_2 в точките A и B, а k_1 в точка C. Ако перпендикулярът към ℓ в точка M пресича k_1 в точка D, то:

а) докажете, че $MA^2 + MB^2 + MD^2 = 2\left(R_1^2 + R_2^2\right)$;

б) изразете отсечките MA, MB и MD чрез R_1 и R_2, когато лицето на ΔCMD е най-голямо.

Задача 18. В остроъгълен триъгълник ABC с диаметър AB е построена окръжност, която пресича BC и AC съответно в точките B_1 и A_1, така, че $AB_1 : B_1C = 1:3$ и $CA_1 : A_1B = 1:2$. Намерете $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$.

Задача 19. Да се докаже, че ако в разностранен триъгълник ABC правата, която минава през медицентъра и центъра на описаната около триъгълника окръжност е перпендикулярна на медианата CC_1, то $a^2+b^2=2c^2$.

Задача 20. Две окръжности с радиуси r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) се допират външно в точка C. Да се намерят страните на ΔABC, където AB е общата външна допирателна към двете окръжности.

Задача 21. Около четириъгълник $ABCD$ е описана окръжност. Ако AB пресича CD в точка M така, че $MA < MB$, $AD = 2$, $MA = 3$, $MC = 9$ и периметъра на четириъгълника е 22, да се намерят другите страни на четириъгълника.

Задача 22. Изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е вписан в окръжност с радиус R. Ако диагоналите му са взаимноперпендикулярни, докажете, че:

а) $AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2 = 4R^2$;

б) ако d е разстоянието от центъра на описаната около четириъгълника окръжност до пресечната точка на диагоналите му, то $AC^2 + BD^2 = 4\left(2R^2 - d^2\right)$.

Задача 23. В правоъгълния ΔABC височината CD към хипотенузата е равна на h.

а) Да се намерят лицето на ΔABC и разстоянието от върха на правия ъгъл до центъра на вписаната в триъгълника окръжност, ако $AC = 30$ см и $CD = 24$ см;

б) При дадено h, да се намери най-малката дължина на хипотенузата.

Задача 24. Окръжностите k_1 и k_2 с радиуси съответно R и r ($R > r$) се допират вътрешно в точка A. Хордата CD от k_1 пресича k_2 и е перпендикулярна на диаметъра AB на k_2. Точка E е една от пресечните точки на CD с k_2. Намерете радиуса на описаната окръжност около ΔAEC.

Задача 25. Даден е квадрат $ABCD$ с дължина на страната 3. Върху страните AD и CD са взети точките M и N такива, че $MD + DN = 3$. Правите BM и CD се пресичат в точка E. Ако $ME = 4$, намерете дължината на отсечката NE.

Задача 26. Даден е ъгъл с връх точката O и мярка α. Точка A е вътрешна за ъгъла и такава, че разстоянието ѝ до едното рамо на ъгъла е равно на a, а ортогоналната проекция на отсечката OA върху другото рамо е равна на b. Намерете OA.

§7. Решаване на произволен триъгълник, успоредник, трапец и произволен четириъгълник

В този параграф съществено ще използваме основните понятия и теореми разгледани в ([M], гл.II, §7) и следните общоприети означение за триъгълник ABC.

1. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.
2. $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.
3. $S = S_{\Delta ABC}$.
4. h_a, h_b, h_c - височините на триъгълника, към съответните страни.
5. m_a, m_b, m_c - медианите на триъгълника, към съответните страни.
6. ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c - ъглополовящите на триъгълника, към съответните страни.
7. R и r - радиусите на описаната и вписаната окръжности.
8. H, G, O и I - ортоцентърът, медицентърът, центърът на описаната окръжност и центърът на вписаната окръжност;

Задача 1. Даден е триъгълник ABC със страни $AB = 15$, $AC = 12$ и $BC = 18$. Да се намерят:

а) $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$; б) S;

в) h_c, R и r; г) m_c и ℓ_c; д) AH и разстоянието от O до BC.

Задача 2. За ΔABC са дадени $AB=5$, $\angle BAC=60^\circ$ и $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$. Да се намерят:

а) AC и BC; б) h_c, m_c и ℓ_c.

Задача 3. За ΔABC са дадени $\angle BAC=120^\circ$, $r=\sqrt{3}$ и $R=\frac{14\sqrt{3}}{3}$. Да се намерят:

а) страните на триъгълника; б) разстоянието между O и I.

Задача 4. За триъгълник ABC са дадени $IA=\sqrt{10}$, $IB=\sqrt{5}$ и $IC=\sqrt{2}$. Да се намерят страните на триъгълника.

Задача 5. Точка M е върху страната AC на ΔABC. Ако $CM=2$, $AM=12$, $BM=4$ и $\angle ABC=120^\circ$, намерете:

а) AB и BC; б) разстоянията от O до страните на триъгълника.

Задача 6. Точка M е върху страната AB на ΔABC. Ако $AC=8$, $BC=12$, $\angle ACM=60^\circ$ и $\angle BCM=45^\circ$, намерете CM.

Задача 7. За ΔABC са дадени $S_{\Delta AIB}=60$, $S_{\Delta BIC}=28$, $S_{\Delta AIC}=80$. Да се намерят:

а) страните на триъгълника;

б) разстоянието между центровете на вписаната и описаната окръжности.

Задача 8. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с големина на единия остър ъгъл α. Нека M е такава вътрешна точка за триъгълника ABC, че $\angle MAB=\angle MBC=\angle MCA=\varphi$. Да се докаже, че $\operatorname{tg}\varphi=\sin\alpha.\cos\alpha$.

Задача 9. Нека M е вътрешна точка за ΔABC така, че $\angle MAB=\angle MBC=\angle MCA=\varphi$. Да се докаже, че $\operatorname{cotg}\varphi=\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma=$ $=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$.

Задача 10. (*Формула на Ойлер*) Да се докаже, че за всеки триъгълник е в сила условието $OI^2=R^2-2Rr$.

Задача 11. Точка M е медицентър на ΔABC с лице S. Точките A_1 и B_1 са среди съответно на страните BC и CA, а $\angle ACB=\gamma$, $\angle AMB=\gamma_1$.

а) Да се намери ъгъл γ_1, ако $3S=AA_1.BB_1$.

б) Да се докаже, че $\operatorname{cotg}\gamma-\operatorname{cotg}\gamma_1=\frac{a^2+b^2+c^2}{6S}$.

в) Ако $\gamma+\gamma_1=\pi$, да се докаже, че $\gamma\le\frac{\pi}{3}$. Какъв е триъгълникът, ако $\gamma=\frac{\pi}{3}$ и $\gamma_1=\frac{2\pi}{3}$?

Задача 12. Даден е остроъгълният ΔABC с височини AA_1, BB_1 и CC_1. Ако p_a, p_b и p_c са разстоянията от върховете A, B и C на триъгълника съответно до B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 да се докаже, че:

а) $\dfrac{p_a}{h_a}=\cos\alpha$; б) $p_a+p_b+p_c=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4R}$; в) $\dfrac{p_a}{a^2}+\dfrac{p_b}{b^2}+\dfrac{p_c}{c^2}\geq\dfrac{3}{4R}$.

Кога се достига равенство?

Задача 13. Страните на ΔABC образуват аритметична прогресия. Лицето му се отнася към лицето на равностранен триъгълник със същия периметър както $3:5$. Да се намерят ъглите на ΔABC. Да се докаже, че $c^2-4d^2=12r^2$, където c е средната по големина страна на ΔABC, d е разликата на аритметичната прогресия и $d>0$, и r е радиусът на вписаната в ΔABC окръжност.

Задача 14. Точка O е център на описаната около ΔABC окръжност, а D е симетричната точка на O спрямо страната AB. Докажете, че $CD^2=R^2+a^2+b^2-c^2$.

Задача 15. Ако CD е диаметър на описаната около ΔABC окръжност, а I център на вписаната в триъгълника окръжност, докажете, че $DI^2=4R^2-ab$.

Задача 16. Разстоянията от вътрешна точка M за ΔABC до върховете му са равни на x_1, x_2 и x_3, разстоянията ѝ до страните BC, CA и AB са съответно d_1, d_2 и d_3. Докажете, че $x_1+x_2+x_3\geq 2(d_1+d_2+d_3)$. Кога се достига равенството?

Задача 17. Да се докаже, че за всеки триъгълник е в сила равенството $r=\dfrac{a\sin\dfrac{\beta}{2}.\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

Задача 18. Намерете ъглите на правоъгълен триъгълник, за който отношението на радиуса на вписаната окръжност и радиуса на описаната окръжност има най-голяма стойност.

Задача 19. Докажете, че за всеки триъгълник е в сила равенството $r=4R\sin\dfrac{\alpha}{2}.\sin\dfrac{\beta}{2}.\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

Задача 20. Ако разстоянията от центъра на вписаната в триъгълник окръжност до върховете на триъгълника са съответно x_a, x_b и x_c, докажете, че $\dfrac{x_a\,x_b\,x_c}{r}=\dfrac{a\,b\,c}{p}$.

Задача 21. За триъгълник ABC са дадени m_c, α и β. Намерете лицето на триъгълника.

Задача 22. Ъглите на триъгълник образуват аритметична прогресия с разлика φ. Намерете лицето на триъгълника, ако периметърът му е равен на $2p$.

Задача 23. За ΔABC са дадени α, a и $\dfrac{b}{c} = k \neq 1$. Намерете β, b и c.

Задача 24. В ΔABC AD и CE са медиани, като $AD = 5$, $\angle DAC = \dfrac{\pi}{8}$ и $\angle ECA = \dfrac{\pi}{4}$. Намерете лицето на ΔABC.

Задача 25. В триъгълник ABC $AB = 2$ и медианата $BD = 1$. Ако $\angle BDA = \beta$ ($0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$), намерете лицето на ΔABC.

Задача 26. Намерете косинусите на ъглите на триъгълник, ако $h_a : h_b : h_c = 4:5:6$.

Задача 27. В остроъгълният ΔABC страната AC е равна на 6, а AP и CQ са височини ($P \in BC$, $Q \in AB$). Ако лицето на ΔBPQ е равно на 1, а радиуса на описаната окръжност около ΔABC е равен на $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$, намерете лицето на четириъгълника $AQPC$.

Задача 28. В триъгълник ABC $\alpha = 60°$ и $\beta = 75°$. Намерете отношението $\dfrac{\ell_a}{\ell_b}$.

Задача 29. В ΔABC ъглополовящата AK ($K \in BC$) е перпендикулярна на медианата BM ($M \in AC$). Ако $\angle ABC = 120°$, намерете отношението на лицето на ΔABC и лицето на описаният около ΔABC кръг.

Задача 30. В равнината са дадени две окръжности с радиуси 3 и 1 и разстояние между центровете $2\sqrt{2}$. Общата им външна допирателна се допира до тях в точките A и B. Намерете лицето на триъгълника с върхове точките A, B и пресечната точка на двете окръжности, която е по-близо до допирателната.

Задача 31. От вътрешна точка M на равностранния ΔABC са спуснати перпендикулярите MA_1, MB_1 и MC_1 съответно към страните BC, AC и AB, ($A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ и $C_1 \in AB$), където $MA_1 = 14$, $MB_1 = 5$ и $MC_1 = 16$. Намерете:

а) страните на $\Delta A_1B_1C_1$;

б) MA, MB и MC;

в) страните на ΔABC.

Задача 32. Точките O и M са съответно център на описаната около ΔABC окръжност и медицентър на триъгълника. Ако AA_1, BB_1 и CC_1 са медиани на триъгълника и OM е перпендикулярна на BB_1 да се докаже, че:

а) около четириъгълника BA_1MC_1 може да се опише окръжност;

б) $0 < \beta \leq \dfrac{\pi}{3}$.

Задача 33. Да се докаже, че за ΔABC $\dfrac{1}{\ell_c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \gamma=120^\circ$.

Задача 34. Точка M е вътрешна за равностранния триъгълник ABC така, че $MA=9$, $MB=3\sqrt{7}$ и $MC=6$. Да се намери дължината на страната на ΔABC.

Задача 35. Даден е триъгълник ABC, в който $AB=1$ и $\angle ACB=90^\circ$. Върху страната AB са взети точките M и N така, че отсечките CM и CN разделят $\angle ACB$ на три равни части.

а) Да се намерят острите ъгли на ΔABC, ако $MN=\dfrac{1}{4}$.

б) Да се докаже, че $MN\le 2-\sqrt{3}$.

Задача 36. Да се докаже, че за всеки триъгълник са в сила равенствата:

а) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$;

б) $\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}.\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}.\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=1$.

Задача 37. Да се докаже, че за всеки триъгълник са в сила неравенствата и да се намери кога се достига равенство:

а) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\ge -\dfrac{3}{2}$;

б) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;

в) $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\beta}+\dfrac{1}{\sin\gamma}\ge 2\sqrt{3}$;

г) $a+b+c\le 9\sqrt{3}R$;

д) $\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\gamma\ge\sqrt{3}$;

е) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\ge\sqrt{3}$;

ж) $\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}\ge 3\sqrt{3}$.

Задача 38. Докажете, че за всеки триъгълник са в сила неравенствата:

а) $h_a\le\sqrt{p(p-a)}$;

б) $h_a\le\sqrt{bc}.\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

в) $a\ge 2h_a.\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Задача 39. Да се намери лицето на успоредник по дадени:

а) диагонали d_1 и d_2 и остър ъгъл с мярка α;

б) страни a и b и остър ъгъл между диагоналите равен на φ.

Задача 40. В ромб $ABCD$ е вписана окръжност с радиус r, а $\angle BAD = 60^\circ$.

а) Намерете диагоналите и страната на ромба.

б) Намерете разстоянието между центровете на описаните окръжности около триъгълниците ABC и ABD.

Задача 41. Намерете лицето на ромб, ако дължините на радиусите на окръжностите, описани около триъгълниците ABC и ABD са равни на R и r.

Задача 42. Да се докаже, че дължините m и n ($m \ge n$) на диагоналите, дължините на страните a и b и лицето на успоредника са свързани с равенството $m^2 - n^2 = 4\sqrt{a^2b^2 - S^2}$.

Задача 43. Даден е успоредник $ABCD$ с пресечна точка O на диагоналите. Ъглополовящите на ъглите, определени от диагоналите, пресичат страните AB, BC, CD и DA на успоредника съответно в точките K, L, M и N. Докажете, че:

а) четириъгълникът $KLMN$ е ромб и изразете лицето му чрез диагоналите на успоредника и ъгъла между тях;

б) ако лицето на дадения успоредник е два пъти по-голямо от лицето на получения ромб, успоредникът е правоъгълник.

Задача 44. Успоредникът $ABCD$ има страни $AB = \dfrac{23\sqrt{3}}{3}$ см и $BC = \dfrac{22\sqrt{3}}{3}$ см и диагонал $BD = 13$ см. Ако H_1 и H_2 са ортоцентровете съответно на триъгълник ABD и на триъгълник BCD, намерете синусите на ъглите на ΔBDH_1 и дължината на отсечката H_1H_2.

Задача 45. Даден е ромб $ABCD$ със страна $AB = 2$. Големината на острият ъгъл BAD е 60°. Върху страните BC и CD са избрани точки M и N ($M \in BC$, $N \in CD$) така, че $MC + CN = 2$. Правите AN и BM се пресичат в точка E и $NE = 2\sqrt{10}$. Намерете дължината на отсечката ME.

Задача 46. Даден е успоредник $ABCD$, в който $AB = a$, $BC = b$ и $\angle BAD = \alpha < 90^\circ$. Ако дължините на диагоналите на успоредника са 1 и 2, докажете, че:

а) $\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{4ab+3}{4ab-3}}$;

б) $\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2} \ge 2$.

Задача 47. Да се докаже, че за всеки трапец е в сила зависимостта $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$, където a, b са дължините на основите, c, d - на бедрата, d_1, d_2 - на диагоналите на трапеца.

Задача 48. Основите на трапец са a и b ($a > b$). Намерете лицето на трапеца, ако ъглите при голямата му основа са α и β.

Задача 49. Да се пресметне лицето на трапец, ако дължините на основите му са $a = 40$, $b = 19$, а дължините на диагоналите му са $d_1 = 37$, $d_2 = 12\sqrt{5}$.

Задача 50. В равнобедрен трапец $ABCD$ отношението на AB и CD е $5:1$. Перпендикулярът от върха A към бедрото BC пресича бедрото в точка M. Дължините на BC и AM са равни.

а) Да се пресметне синусът на ъгъла при голямата основа на трапеца.

б) Да се намери лицето на трапеца, ако дължината на BC е равна на a.

Задача 51. Диагоналите AC и BD на трапеца $ABCD$ ($AB || CD$) се пресичат в точка O и $AC \perp BD$. Права през O и средата M на бедрото BC пресича AD в точка N, като $MN \perp AD$.

а) Докажете, че трапецът $ABCD$ е равнобедрен.

б) Ако $MN = \dfrac{9}{\sqrt{10}}$ и лицето на трапеца $ABCD$ е 9, да се намерят дължините на основите AB и CD.

Задача 52. Да се докаже, че за всеки четириъгълник диагоналите му са взаимноперпендикулярни точно тогава, когато сборът от квадратите на две срещуположни страни е равен на сборът от квадратите на другите две страни.

Задача 53. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Ако M, N, P и Q са среди съответно на AB, BC, DC и DA, да се докаже, че $S_{ABCD} = 2S_{MNPQ}$.

Задача 54. Да се докаже, че във всеки изпъкнал четириъгълник сборът от квадратите на четирите страни е равен на сбора от квадратите на диагоналите му, събран с учетворения квадрат на дължината на отсечката, която съединява средите на диагоналите.

Задача 55. В окръжност е вписан четириъгълник $ABCD$ с перпендикулярни диагонали, които се пресичат в точка E. През точка E минава права, която е перпендикулярна на страната AB и пресича CD в точка M.

а) Да се докаже, че EM е медиана на ΔCDE.

б) Да се определи дължината на EM, ако $AD = a$, $AB = b$ и $\angle BDC = \alpha$.

Задача 56. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, около който може да се опише и в който може да се впише окръжност. Диагоналът AC го разделя на два равнолицеви триъгълници.

а) Да се докаже, че $AB = AD$ и $BC = CD$.

б) Ако дължината на радиуса на вписаната в четириъгълника окръжност е r и $AB = 3BC$, да се намери лицето на четириъгълника.

Задача 57. Ако за изпъкналия четириъгълник е дадено $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ADC = \gamma$, то

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - a\,b\,c\,d\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}\ .$$

Задача 58. Да се докаже, че диагоналите на четириъгълник, който е описан около окръжност, и отсечките, които съединяват допирните точки на двойките срещуположни страни, се пресичат в една точка.

Задача 59. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, чийто диагонали се пресичат в точката O. Ако радиусите на окръжностите, описани около триъгълниците AOB, BOC, COD и DOA са съответно R_1, R_2, R_3 и R_4, да се докаже, че в $ABCD$ може да се впише окръжност точно тогава, когато $R_1+R_3=R_2+R_4$.

Задача 60. Изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е описан около окръжност с радиус R. Числата $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ принадлежат на множеството от мерките на вътрешните му ъгли. Да се намери лицето на четириъгълника и ъгълът между диагоналите му.

§8.Вектори в равнината. Тригонометрични и геометрични равенства и неравенства

В този параграф се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([М], гл.II, §8).

Задача 1. Ако AA_1, BB_1 и CC_1 са медианите на ΔABC, да се докаже, че $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. Изяснете геометричният смисъл на това равенство.

Задача 2. Точките L, M и N лежат съответно на страните BC, CA и AB на ΔABC. Ако те делят вътрешно страните в едно и също отношение, да се докаже, че отсечките AL, BM и CN образуват триъгълник.

Задача 3. Точка M е вътрешна за ΔABC. Точка M_1 е симетрична на M спрямо A, точка M_2 е симетрична на M_1 спрямо B и точка M_3 е симетрична на M_2 спрямо C. Да се докаже, че средата M_0 на отсечката MM_3 не зависи от избора на точката M.

Задача 4. Точка M е вътрешна за изпъкналият четириъгълник $ABCD$. Да се докаже, че точките симетрични на M спрямо средите на страните на $ABCD$ са върхове на успоредник.

Задача 5. Точката I е център на вписаната окръжност в ΔABC. Ако дължините на страните на ΔABC са съответно a, b и c, а точка O е произволна точка от равнината на триъгълника различна от I да се изрази векторът $\overrightarrow{OI}$ чрез векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

Задача 6. За ΔABC са дадени $BC=a$, $AC=b$ и $\angle ACB=\gamma$. Да се намери дължината на ъглополовящата CL.

Задача 7. Даден е изпъкналият четириъгълник $ABCD$. Точките P и Q са среди съответно на BC и AD. Ако $AB=a$, $CD=b$ и правите AB и CD сключват остър ъгъл с мярка φ, да се намери дължината на отсечката PQ.

Задача 8. Даден е изпъкналият четириъгълник $ABCD$. Точките M и N лежат съответно на AB и CD и $MA:MB=NC:ND=m:n$. Ако точките P и Q са среди съответно на AD и BC, а правата MN пресича PQ в точка F, да се намерят отношенията $FP:FQ$ и $FM:FN$.

Задача 9. Върху страната BC на триъгълник ABC е взета точка M така, че $BM = 2CM$. Точките K и L лежат съответно на страните AC и AB така, че $AK = 2CK$ и $BL = 2AL$. Да се намери в какво отношение правата KL дели отсечката AM.

Задача 10. В окръжност с радиус R е вписан равностранният ΔABC. Ако точка M е произволна точка от окръжността, да се намери $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Задача 11. Около окръжност е описан равностранен ΔABC със страна a. Ако P е произволна точка от окръжността, да се намери $PA^2 + PB^2 + PC^2$.

Задача 12. Точка M е медицентърът на ΔABC, а P е произволна точка от равнината на триъгълника.

а) Да се докаже, че $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2$.

б) В равнината на триъгълника да се намери такава точка, че сумата от квадратите на разстоянията ѝ до върховете на триъгълника да е най-малка.

Задача 13. Ако за ΔABC са въведени означенията $BC = a$, $AC = b$, ъглополовящата $CL = \ell_c$, медианата $CM = m_c$ и $\angle ACB = \gamma$, то:

а) $\gamma = 120°$ точно тогава, когато $\dfrac{1}{\ell_c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$;

б) ако $\dfrac{1}{m_c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, то $\gamma \geq 120°$;

в) ако $\dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, то $\gamma \leq 120°$;

г) ако $\dfrac{\ell_a}{b} = \dfrac{\ell_b}{a}$, то $a = b$ или $\gamma = 60°$.

Задача 14. Точка O е център на описаната около ΔABC окръжност, а x_a, x_b и x_c са разстоянията и до BC, CA и AB да се докаже, че:

а) $x_a + x_b + x_c = \dfrac{3}{2}R$;

б) $x_a + x_b + x_c = r + R$, където r и R са съответно радиусите на вписаната и описаната окръжности;

в) $h_a \leq r + R \leq h_c$, където h_a и h_c са съответно най-малката и най-голямата височина на триъгълника;

г) $x_a . x_b . x_c \leq \dfrac{(r+R)^3}{27}$.

§9. Основни понятия и твърдения в стереометрията

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми разгледани в ([M], гл.II, §9).

Задача 1. Точките A, B, C и D са върховете на триъгълна пирамида, а точките A_1, B_1, C_1 и D_1 са съответно техните проекции върху срещуположните им стени. Докажете, че:

а) ако AA_1 и BB_1 се пресичат, то $AB \perp CD$;

б) ако $AB \perp CD$, то AA_1 и BB_1 се пресичат (CC_1 и DD_1 също се пресичат);

в) ако $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$, то D_1 е ортоцентърът на триъгълника ABC;

г) ако D_1 е ортоцентърът на триъгълника ABC, то $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$;

д) ако $AB = BC$ и $AD = DC$, то $AC \perp BD$;

е) ако $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$, то $AD \perp BC$[1].

Задача 2. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб a и околен ръб ℓ. Да се докаже, че радиусът R на описаната сфера около пирамидата е равен на $\dfrac{\ell^2}{\sqrt{4\ell^2 - 2a^2}}$.

а) Изразете a чрез ℓ и R.

б) Изразете ℓ чрез a и R.

Задача 3. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб a и околен ръб ℓ. Да се докаже, че радиусът r на вписаната в пирамидата сфера е равен на $\dfrac{a\sqrt{4\ell^2 - 2a^2}}{2\left(a + \sqrt{4\ell^2 - 2a^2}\right)}$.

а) Изразете ℓ чрез a и r.

б) Докажете, че $a^3 - 2ra^2 + \left(3r^2 - 2\ell^2\right)a + 4\ell^2 r = 0$.

Задача 4. Отсечките OA, OB и OC са взаимно перпендикулярни и техните дължини са съответно a, b и c. Да се намери разстоянието от точка O до равнината определена от A, B и C.

Задача 5. Докажете, че ако една пресечена пирамида е вписана в сфера, то околните й ръбове са еднакво наклонени към основата.

Задача 6. В тетраедъра $ABCD$ $\angle ADB = \angle BDC = \angle ADC = 90°$. Да се докаже, че върхът D, медицентърът на триъгълника ABC и центърът на описаната около тетраедъра сфера лежат на една права.

Задача 7. Да се докаже, че диагоналът AC_1 на паралелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ се разделя на три равни части от равнините (A_1BD) и (CB_1D_1).

Задача 8. Да се докаже, че отсечките с краища средите на кръстосаните ръбове на тетраедър се пресичат в точка, която ги разполовява. Да се докаже, че

[1] Тетраедър, на който четирите височини се пресичат в една точка се нарича **ортоцентричен**, а тази точка се нарича **ортоцентър на тетраедъра**.

същата точка дели всяка от отсечките съединяващи връх на тетраедъра с медицентъра на срещулежащата му стена в отношение $3:1$, считано от върха[2].

Задача 9. Две от стените на тетраедър имат лица S_1 и S_2, общият им ръб е ℓ и ъгълът определен от тях е β. Да се докаже, че обемът на тетраедъра е равен на $\dfrac{2S_1.S_2.\sin\beta}{3\ell}$.

Задача 10. Да се докаже, че обемът на тетраедъра $ABCD$ е равен на $\dfrac{1}{6}d.AB.CD.\sin\varphi$, където d е разстоянието между кръстосаните прави AB и CD, а φ е ъгъла определен от тези прави.

Задача 11. Тетраедърът $ABCD$ има $\angle ADB=\angle BDC=\angle ADC=90^\circ$. Да се докаже, че за лицата на стените му е в сила зависимостта:

$$S^2_{\Delta ABC}=S^2_{\Delta ADB}+S^2_{\Delta BDC}+S^2_{\Delta ADC}$$ [3].

Задача 12. Два кръстосани ръба на тетраедър се преместват по правите върху тях така, че дължините им остават постоянни. Да се докаже, че обемът на тетраедъра остава постоянен.

Задача 13. Основата на прав паралелепипед е ромб. Лицата на диагоналните му сечения са S_1 и S_2. Да се докаже, че лицето на околната му повърхнина е равно на $2\sqrt{S_1^2+S_2^2}$.

Задача 14. Даден е успоредникът $ABCD$.

а) Съществува ли точка M, нележаща в равнината $(ABCD)$, която да е равноотдалечена от върховете на успоредника?

б) Съществува ли точка N, нележаща в равнината $(ABCD)$, която да е равноотдалечена от правите, съдържащи страните на успоредника?

в) Съществува ли точка P, нележаща в равнината $(ABCD)$, която да е равноотдалечена както от върховете, така и от правите върху страните на успоредника?

Задача 15. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб 1. Точките M и N са среди съответно на CD и CC_1. Намерете разстоянието между правите AN и BM.

Задача 16. В триъгълната пирамида $SABC$ всички равнинни ъгли при върха S са прави. SO е височина на пирамидата[4]. Известно е, че отношението на лицето на триъгълника AOB към лицето на триъгълника BOC е равни на k. Намерете отношението на лицето на триъгълника ASB към лицето на триъгълника BSC.

---

[2] Тези отсечки се наричат **медиани на тетраедъра**. Тетраедърът има четири медиани. Пресечната им точка се нарича **медицентър на тетраедъра**.

[3] Тази зависимост се нарича **Теорема на Питагор в пространството**.

[4] $SO\perp(ABC)$ и $O\in(ABC)$

Задача 17. Обемът на триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ е V. На ръбовете BB_1 и CC_1 са избрани съответно точките M и N така, че $BM:BB_1=m$ и $CN:CC_1=n$. Да се намери обемът на многостена $ABCA_1MN$.

§10. Успоредност в пространството

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([M], гл.II, §10).

Задача 1. В пирамида е построено сечение, успоредно на основата, което дели височината на пирамидата в отношение $2:3$. Намерете лицето на сечението, ако е известно, че то е по-малко от лицето на основата с 84 см^2.

Задача 2. Правите AB и CD са успоредни помежду си и лежат в две пресичащи се равнини, които образуват двустенен ъгъл от $60°$. Разстоянията от точките A и D до пресечницата на двете равнини са съответно a и b. Намерете разстоянието между правите AB и CD.

Задача 3. Краищата на отсечката AB лежат на стените на прав двустенен ъгъл. Разстоянията от точките A и B до ръба на двустенния ъгъл са равни помежду си. Намерете отношението на ъглите, които отсечката сключва със стените на двустенния ъгъл.

Задача 4. Основата на пирамидата $SABCD$ е правоъгълникът $ABCD$ със страни $AB=4$ и $BC=2$. Дължините на всички околни ръбове са равни на 3. Точка M е среда на ръба AS. Равнината μ минава по правата BM и е успоредна на диагонала AC.

а) Постройте сечението на μ с пирамидата.

б) Постройте линеен ъгъл на двустенния ъгъл, определен от равнините (ACS) и μ.

в) Ако $\varphi=\angle[(ACS),\mu]$, намерете $\operatorname{tg}\varphi$.

Задача 5. Основата на пирамидата $DABC$ е равностранният триъгълник ABC със страна 2 см. Стената ACD е перпендикулярна на основата, при което $AD=CD=\sqrt{6}$ см.

а) Намерете дължината на ръба BD.

б) Постройте сечение на пирамидата с равнина, успоредна на два кръстосани ръба и определете вида му.

в) Намерете лицата на всички сечения на пирамидата с равнина, които са квадрати.

Задача 6. Правилната триъгълна пирамида $SABC$ има за основа триъгълник ABC с дължина на страната 2. Равнина μ минава по медианата AM на стената ASB и е успоредна на височината ST на стената ASC.

а) Построите сечението на μ с пирамидата.

б) Намерете лицето на полученото сечение, ако разстоянието от центъра на основата на пирамидата до μ е равно на $\frac{1}{5}$.

Задача 7. Основа на пирамидата $TABC$ е равностранният триъгълник ABC със страна, равна на 4. Известно е, че $TA \perp (ABC)$. Равнината ρ минава по медианата CM на околната стена TBC и е успоредна на медианата AN на околната стена TAC.

а) Постройте сечението на ρ с пирамидата.

б) Намерете лицето на полученото сечение, ако разстоянието от правата AN до равнината ρ е равно на $\frac{2}{3}$.

Задача 8. Върху диагоналите AB_1, BC_1 съответно на стените (ABB_1A_1) и (BCC_1B_1) на паралелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ са избрани такива точки M и N, че отсечките MN и A_1C са успоредни. Да се намери отношението от дължините на тези отсечки.

Задача 9. Дадена е правила триъгълна пирамида с основа ΔABC и връх D. Точките K и L са среди съответно на AB и BC. Върху ръба AD е взета точка N така, че $AN:ND = 1:3$. През N е построена равнина α, успоредна на равнината (KLD).

а) Определете вида на сечението на α с пирамидата.

б) През точката N е построена права ℓ, която е успоредна на равнината (KLD) и отсечката от нея, лежаща втре в пирамидата, има възможно най-голяма дължина. Намерете дължината на тази отсечка, ако $AB = 4$ и $DK = 2\sqrt{7}$.

Задача 10. Успоредните прави ℓ_1 и ℓ_2 пресичат успоредните равнини α и β съответно в точките A_1, B_1 и A_2, B_2. Нека O е пресечната точка на правите A_1B_2 и A_2B_1. Да се докаже, че произволна права ℓ_3 през O, която не лежи в равнината определена от ℓ_1 и ℓ_2 и не е успоредна на равнините α и β, пресича тези равнини в точки A_3, B_3 такива, че триъгълниците $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ са еднакви.

Задача 11. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб a. Точките E и F са съответно от ръбовете AA_1 и CC_1 така, че $AE:EA_1 = 3:1$ и $CF:FC_1 = 3:1$. Да се построи пресечницата на стената $A_1B_1C_1D_1$ с равнината (BEF) и да се намери дължината й.

Задача 12. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точката O е център на стената $ABCD$, а върху ръбовете AA_1 и BB_1 са взети съответно точките M и N така, че $AM:MA_1 = B_1N:NB = 1:2$.

а) Да се построят пресечниците на равнината (MON) със стените на куба.

б) Да се намери отношението от периметрите на сечението на куба с равнината (MON) и ΔACC_1.

Задача 13. Дадена е правила триъгълна пирамида. Да се построят пресечниците на стените на пирамидата с равнината, която минава през:

а) средите на два основни ръба и средата на височината;

б) центъра на основата и е успоредна на два непресичащи се ръба;

в) средата на височината и е успоредна на два непресичащи се ръба.

Задача 14. Дадена е правила четириъгълна пирамида $SABCD$. На правата CD е избрана точка K (D е между K и C) такава, че $DK:KC=3:4$, а на ръба SC е избрана точка L така, че $SL:LC=2:1$. Постройте пресечниците на стените на пирамидата с равнината (KBL).

Задача 15. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точките P и Q са средите на отсечките BC и CD, а M е медицентърът на триъгълника PQC_1.

а) Намерете точка N от правата AA_1 такава, че правите C_1N и CM да са успоредни.

б) Съществува ли точка L от правата BB_1 такава, че правите DL и CM да са успоредни?

§11. Ъгли в пространството

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([M], гл.II, §11).

Задача 1. Дадена е правилна триъгълна пирамида $QABC$. Постройте линейният ъгъл на двустенния ъгъл, определен от равнините:

а) (ABC) и (BCQ);

б) (BCQ) и (ACQ).

Задача 2. Дадена е призмата $ABCA_1B_1C_1$, на която всички ръбове са равни. Ортогоналната проекция на върха A_1 върху равнината на основата ABC съвпада с центъра на триъгълника ABC. Намерете косинуса на двустенния ъгъл между околна стена и равнината на основата.

Задача 3. Даден е паралелепипедът $ABCDA_1B_1C_1D_1$, на който разстоянието между околните ръбове AA_1 и BB_1 е $d=7\sqrt{2}$ см, а основата $ABCD$ е ромб. Ортогоналната проекция на върха A_1 върху равнината на основата съвпада с пресечната точка на диагоналите на основата. Намерете двустенния ъгъл при ръба AA_1, ако $BD=14$ см.

Задача 4. Една от страните на равностранен триъгълник лежи в равнината μ, а друга негова страна сключва с равнината μ ъгъл α. Да се намери синусът на ъгъла между равнината на триъгълника и равнината μ.

Задача 5. Страната AB на триъгълника ABC лежи в равнината μ и има дължина c. Страната BC има дължина a и сключва с равнината μ ъгъл α.

Страната AC има дължина b. Да се намерят синусите: на ъгъла, който страната AC сключва с равнината μ и на ъгъла между равнината на триъгълника и μ.

Задача 6. Страните AB и AC на равностранен триъгълник ABC лежат съответно в стените λ и μ на двустенен ъгъл с големина α, $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Страната AB сключва с пресечницата на равнините λ и μ ъгъл β, $\beta < \frac{\pi}{2}$. Да се намери синусът на ъгъла γ между равнините (ABC) и μ.

Задача 7. В правилна четириъгълна призма е построено сечение през основен ръб, сключващо с основата ъгъл φ. Ако ψ е ъгълът между диагонала на сечението и лежащ в сечението основен ръб на призмата, да се докаже, че $\cot g\psi = \cos\varphi$.

Задача 8. В правилна четириъгълна пирамида е построено сечение през основен ръб, сключващо с основата ъгъл φ. Ако ψ е ъгълът между диагонала на сечението и равнината на основата на пирамидата, да се докаже, че $\operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}.\operatorname{tg}\varphi$.

Задача 9. Дадена е триъгълна пирамида. Да се докаже, че всеки равнинен ъгъл при връх на пирамидата е по-малък от сумата на другите два равнинни ъгли при същия връх.

Задача 10. Дадена е n-ъгълна пирамида. Да се докаже, че сумата от равнинните ъгли при върха на пирамидата е по-малък от $360°$.

Задача 11. Да се докаже, че ако ъглите между ръбовете с начало един и същ връх на тетраедър са тъпи, то и двустенните ъгли, при всеки от ръбовете с начало същия връх, са тъпи.

Задача 12. Права четириъгълна призма с височина H има за основа ромб, който има височина h. По-малък диагонал на призмата, равен на d определя със стените, които минават през един от краищата му ъгли съответно равни на α, β и γ. Да се докаже, че:

а) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \dfrac{H^2 + 2h^2}{d^2}$;

б) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 3 - \dfrac{H^2 + 2h^2}{d^2}$.

Задача 13. В правилна триъгълна пирамида основният ръб е 6, а околният ръб е 5. Да се намерят:

а) обема на пирамидата;

б) синуса на ъгъла, който околен ръб сключва с околна стена, в която не лежи.

Задача 14. Диагоналът d на основата на правоъгълен паралелепипед определя със страна на основата ъгъл φ. Ъгълът между тази страна и диагонала на паралелепипеда е равен на β. Намерете лицето на околната повърхнина на паралелепипеда.

Задача 15. Един от катетите на равнобедрен правоъгълен триъгълник лежи в равнината α, а другият определя с нея ъгъл, равен на 45°. Намерете ъгъла, който определя хипотенузата с равнината α.

Задача 16. Даден е куб с основа $ABCD$ и околни ръбове AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Дължината на ръба на куба е равна на 1. По правата B_1C е прекарана равнина, пресичаща ръба AB и образуваща ъгъл 60° с правата A_1B. В какво отношение тази равнина дели ръба AB?

Задача 17. В правоъгълния паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръбове $AB=6$, $AD=2$ и $AA_1=1$ по диагонала AC_1 е прекарана равнина така, че полученото сечение има възможно най-малка сума от квадратите на страните си.

а) Намерете лицето на сечението.

б) Намерете косинуса на ъгъла, определен от секущата равнина и стената $ABCD$.

Задача 18. Основа на пирамидата $SABC$ е правоъгълният триъгълник ABC с прав ъгъл $\angle B$ и $\angle A=\alpha$. Всеки околен ръб определя с равнината на основата ъгъл от 45°. Намерете тангенса на ъгъла φ, определен от равнините (SAC) и (SBC).

Задача 19. $MABCD$ е правилна четириъгълна пирамида с височина h и диагонал на основата d. Намерете:

а) радиуса на описаната около пирамидата сфера;

б) синуса на ъгъла, който околният ръб AM сключва с равнината (BCM).

Задача 20. Дадена е правилна триъгълна пирамида с основен ръб a и височина 4.

а) Да се намери лицето на околната повърхнина на пирамидата.

б) За коя стойност на a ъгълът, определен от околен ръб и основата на пирамидата, е равен на ъгъла, определен от околен ръб и околна стена, в която този ръб не лежи.

Задача 21. Околните стени на правилна триъгълна пирамида $MABC$ с основа ΔABC са правоъгълни триъгълници Ако основният ръб на пирамидата е равен на a да се намерят:

а) обема на пирамидата;

б) косинуса на ъгъла между правите AP и MQ, където точките P и Q лежат на ръба BC и $BP=\frac{1}{2}BC$, $BQ=\frac{3}{4}BC$.

Задача 22. Основата на пирамида е трапец $ABCD$, на който диагоналът BD е перпендикулярен на бедрото AD и сключва с основите на трапеца ъгъл α. Всички околни ръбове на пирамидата са равни. Околната стена през голямата основа AB на трапеца е с ъгъл 2φ при върха M на пирамидата и лице равно на S. Да се намерят:

а) обема на пирамидата;

б) ъглите, които околните стени сключват с равнината на основата на пирамидата.

Задача 23. Даден е кубът $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб a ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ - основи, AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 - околни ръбове). Да се намери:

а) мярката на ъгъла между правата BC_1 и равнината, определена от точките A, D и B_1;

б) тангенса на ъгъла между равнината $(ABCD)$ и равнината, минаваща през върха B и средите на ръбовете AA_1 и A_1D_1;

в) разстоянието от центъра на куба до равнината, минаваща през средата на отсечката MD_1 и перпендикулярна на нея, където M е средата на BC.

Задача 24. В правилна четириъгълна пресечена пирамида е вписано кълбо. Обемът на пресечената пирамида се отнася към обема на кълбото, както $26:3\pi$. Да се намери големината на острия двустенен ъгъл при основата на пресечената пирамида.

Задача 25. Пирамида има за основа равностранен триъгълник със страна a. Два от околните ръбове на пирамидата сключват с равнината на основата ъгъл φ, а стената на която те лежат сключва с равнината на основата ъгъл α. Да се намери обема на пирамидата.

Задача 26. В четириъгълна пирамида $MABCD$ с основа квадрата $ABCD$, околните стени ADM и CDM са перпендикулярни на равнината на основата $ABCD$ на пирамидата, а всяка една от другите две околни стени образува с равнината на основата $ABCD$ ъгъл $60°$. Радиусът на описаната около триъгълника CDM окръжност е равен на R.

а) Намерете лицето на пълната повърхнина на пирамидата.

б) Намерете мерките на двустенните ъгли на пирамидата при всеки околен ръб.

в) Намерете разстоянието между правите MD и AB и разстоянието между правите AD и MB.

Задача 27. В правилна триъгълна пирамида основният ръб има дължина a. Ако α е ъгълът, определен от две околни стени, да се намери обемът на пирамидата.

Задача 28. Тангенсът на двустенния ъгъл при основен ръб на правилна триъгълна пирамида е равен на $2\sqrt{2}$. Равнина γ се допира до вписаната в пирамидата сфера и пресича два околни ръба в средите им. Да се намери ъгълът между равнината γ и равнината на основата на пирамидата.

§12. Перпендикулярност в пространството

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([M], гл.II, §12).

Задача 1. Даден е трапец $ABCD$, на който голямата основа AB лежи в равнината μ, а малката основа CD е на разстояние $d=5$ см от тази равнина.

Намерете разстоянието от пресечната точка на диагоналите на трапеца до равнината, ако $AB:CD=3:2$.

Задача 2. Дадена е пирамидата $QABCD$ с основа правоъгълник. Околният ръб QD е перпендикулярен на основните ръбове DA и DC. Докажете, че:

а) правата QD е перпендикулярна на правите AB и AC;

б) правата CD е перпендикулярна на равнината ADQ и правата AD е перпендикулярна на равнината CDQ;

в) правата BA е перпендикулярна на равнината ADQ и правата BC е перпендикулярна на равнината CDQ.

Задача 3. Да се докаже, че ако права образува равни ъгли с три различни пресичащи се прави, лежащи в една равнина, то правата е перпендикулярна на равнината.

Задача 4. Ръбовете на правоъгълен паралелепипед имат дължини a, b и c. Да се докаже, че разстоянието между правата през ръб с дължина a и кръстосаната ѝ права през диагонал на паралелепипеда е равно на $\frac{b\,c}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

Задача 5. Да се докаже, че за куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

а) ръбът AA_1 е перпендикулярен на равнината $ABCD$;

б) диагоналът BD на основата на куба е перпендикулярен на равнината (ACA_1);

в) диагоналът BD_1 на куба не е перпендикулярен на равнината (ACD_1).

Задача 6. Даден е квадрат $ABCD$ със страна a. Диагоналите му се пресичат в точка O. От върховете A и C са издигнати перпендикулярни отсечки AA' и CC' към равнината на квадрата в едно и също полупространство относно тази равнина така, че $OA'=a$ и $A'C'=2a$. Да се докаже, че $A'C'$ е перпендикулярна на равнината $(A'BD)$.

Задача 7. Даден е прав двустенен ъгъл (α,β) с ръб AB. Отсечката CD лежи в α, $CD\,||\,AB$ и е на разстояние 60 см от ръба AB. Точка E е от равнината β и е на разстояние 91 см от ръба AB. Да се намери разстоянието от точка E до CD.

Задача 8. Кръстосаните прави a и b са перпендикулярни. PQ е ос-отсечката на правите a и b. На правата a лежи точка A ($A\neq P$), а на b - точка B ($B\neq Q$). От точката A отсечката PQ се вижда под ъгъл α, а от точката B - под ъгъл β. Намерете тангенса на ъгъла φ между правите AB и PQ.

Задача 9. Основата на пирамидата $SABC$ е равнобедрен триъгълник ABC с основа $AB=a$ и $\angle CAB=\alpha$. Околните ръбове на пирамидата сключват с основата ѝ ъгли, равни на φ. Да се намерят:

а) обема на пирамидата;

б) разстоянието от средата на основния ръб AC до равнината (ABS).

Задача 10. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, чийто ръб има дължина a, да се намери ъгъла и разстоянието между правите A_1B и AC_1.

Задача 11. В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, чийто ръб има дължина a, да се намери разстоянието между правите A_1B и B_1C.

Задача 12. Страните на триъгълника $a=b=10$ см, $c=12$ см се допират до сфера с радиус 5 см. Намерете разстоянието от центъра на сферата до равнината на триъгълника.

Задача 13. Точките A и B лежат на ръба на двустенен ъгъл от $60°$. Отсечките AC и BD са перпендикулярни на ръба на двустенния ъгъл и лежат на различните негови стени. Намерете дължината на отсечката CD, ако $AB=3$ см, $AC=2$ см и $BD=3$ см.

Задача 14. Катетите на правоъгълен триъгълник са равни на 7 см и 24 см. Намерете разстоянието от върха на правия ъгъл до равнината, която минава по хипотенузата и образува ъгъл от $30°$ с равнината на триъгълника.

Задача 15. От точка, намираща се от дадена равнина α на разстояние $5\sqrt{2}$, са прекарани две наклонени, образуващи с равнината ъгли по $45°$,а ъгълът между тях е $60°$. Намерете разстоянието между прободите на α с наклонените.

Задача 16. Катетът AC на правоъгълния триъгълник ABC ($\angle C=90°$), лежи на ръба на двустенен ъгъл с големина $30°$, образуван от този триъгълник и дадена равнина α. Намерете разстоянието от върха B до равнината α, ако $AC=8$ и $AB=3BC$.

Задача 17. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $VABCD$, с основа $ABCD$ и височина VO към основата, като $VO=AC=a$. Равнината α е успоредна на основата и се допира до вписаната сфера в пирамидата. Ако α пресича околните ръбове AV, BV, CV и DV съответно в точките A_1, B_1, C_1 и D_1, където $A\neq A_1$, намерете:

а) лицето на квадрата $A_1B_1C_1D_1$;

б) косинуса на ъгъла между правите AV и BD_1;

в) разстоянието от точката A до равнината β, минаваща през правата BD_1 и успоредна на ръба AV.

Задача 18. Ъгълът между два съседни околни ръба на правилна четириъгълна пирамида е с големина α. През диагонал на основата е прекарана равнина, перпендикулярна на околен ръб, която разделя околната повърхнина на две части. Намерете отношението на лицата на тези две части.

Задача 19. Дадена е правилна триъгълна пирамида с височина $H=12$ и радиус на описаната около основата окръжност $R=10$. Да се намерят:

а) дължината на перпендикуляра, спуснат от връх на основата към срещуположна околна стена;

б) радиусът на вписаната сфера в пирамидата.

Задача 20. Околните стени на триъгълна пирамида са равнолицеви триъгълници, а една от тях е перпендикулярна на равнината на основата. Да се намери обемът на пирамидата, ако околните ѝ ръбове имат дължина 1.

Задача 21. В правилна триъгълна пирамида дължината на околния ръб е ℓ, а големината на ъгъла, заключен между два околни ръба е β. Да се намери най-късото разстояние между околен ръб и срещуположния му основен ръб.

Задача 22. Дадена е правилна триъгълна пирамида $MABC$ с основа равностранния триъгълник ABC. През точката A е прекарана равнина α, успоредна на правата BC и перпендикулярна на равнината BCM, която пресича ръбовете BM и CM съответно във вътрешните точки P и Q. Отношението на лицата на триъгълниците PQM и BCM е λ^2 ($\lambda > 0$).

а) Намерете синуса на двустенния ъгъл между околна стена и основата ;

б) Ако центърът на вписаната в пирамидата сфера лежи в равнината α и $AB = 1$, определете разстоянието между кръстосаните прави, върху които лежат медианите AA_1 и BB_1 на триъгълниците ABC и BCM.

§13. Призма. Пирамида

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([М], гл.II, §9-13).

Задача 1. Дадена е пирамидата $MABCD$ с основа правоъгълникът $ABCD$, като дължините на всички околни ръбове са равни. Дължините на основните ръбове са $AB = 4$ см и $BC = 3$ см, а ъгълът между два околни ръба, нележащи в една стена е 2α.

а) Да се намери обема на пирамидата.

б) Да се намери разстоянието от точка A до равнината (BDM).

Задача 2. В триъгълна пирамида $MABC$ околната стена ABM сключва с основата ABC ъгъл $45°$, $AM = BM = CM = 2$, $\angle BMC = \angle AMC$ и $\angle AMB = 60°$.

а) Да се намери обема на пирамидата.

б) Да се докаже, че $\cos\angle BMC = \dfrac{3-\sqrt{15}}{6}$.

Задача 3. В една права триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ е дадено $AC = 6$, $AA_1 = 8$. Върхът A е съединен със средата M на BB_1. Точката N е пресечна на CC_1 с ъглополовящата на ъгъл CAC_1. В какво отношение равнината (AMN) разделя обема на призмата?

Задача 4. Диагонал на правилна четириъгълна пресечена пирамида има дължина d, сключва с равнината на основата ъгъл с мярка α и е перпендикулярен на единия от околните ръбове, с който има обща точка. Да се намери обема на дадената пресечена пирамида.

Задача 5. Намерете обема на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ако основата е равнобедрен трапец с перпендикулярни диагонали, а сечението ACC_1A_1 е квадрат с лице 16 см^2.

Задача 6. Основата на призма е квадрат с диагонал $5\sqrt{2}$ см. Намерете обема на призмата, ако единият от диагоналите ѝ е $d=6$ см и сключва с равнината на основата ъгъл $\alpha=60^\circ$.

Задача 7. Основата на пирамида е равнобедрен трапец с голяма основа a, тъп ъгъл α и бедра, равни на малката основа. Всички околни ръбове на пирамидата сключват с равнината на основата ъгъл β. Да се намери обема на пирамидата.

Задача 8. Дадена е правилна триъгълна пирамида $PABC$ с основен ръб a и ъгъл α между околна стена и основата. Точките A_1, B_1 и C_1 лежат на околните ръбове PA, PB и PC така, че равнината на триъгълника $A_1B_1C_1$ е успоредна на основата ABC. Точките A_2, B_2 и C_2 са ортогоналните проекции на точките A_1, B_1 и C_1 върху ABC.

а) Намерете обема на пирамидата $PABC$.

б) Нека x е разстоянието между равнините на триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$. При коя стойност на x обемът на призмата $A_2B_2C_2A_1B_1C_1$ е най-голям?

Задача 9. Страните на основата на триъгълна пирамида са равни на a, b и c. Всички ъгли при върха са прави. Изчислете обема на пирамидата.

Задача 10. За основа на пирамида служи ромб със страна b. Две от околните стени са перпендикулярни на равнината на основата и сключват помежду си ъгъл с големина 135°. Другите две околни стени сключват с равнината на основата ъгли с големина 60°. Да се намери:

а) лицето на околната повърхнина на пирамидата;

б) обема на пирамидата.

Задача 11. Двустенният ъгъл при голямата основа на правилна четириъгълна пресечена пирамида е α. Околната ѝ повърхнина е равна на сбора от лицата на двете основи. Да се намери отношението на периметрите на основите на пресечената пирамида.

Задача 12. Центровете на вписаната в и на описаната около дадена пирамида сфери съвпадат. Да се намери сбора на плоските ъгли при върха на пирамидата.

Задача 13. Ъгълът, определен от двойка пресичащи се околен и основен ръб на правилна триъгълна пирамида, е α. Радиусът на окръжността, вписана в една от околните стени е r. Да се намери лицето на пълната повърхнина на пирамидата.

Задача 14. Лицето на околната повърхнина на правилна четириъгълна пирамида $PABCD$ е $4a^2$ см^2. През основния ѝ ръб AD е прекарана равнина, която отсича от стената (BCP) триъгълник MNP с лице b^2 см^2. Да се намери лицето на околната повърхнина на пирамидата $PAMND$, като $M\in BP$.

Задача 15. Основата ABC на пирамидата $PABC$ е равностранен триъгълник със страна $\sqrt{3}$. Проекцията O на върха P върху основата е вътрешна точка за ΔABC. Разстоянието от O до AC е 1 см. Лицето на стената BCP е $\sqrt{\frac{5}{6}}$, а $\sin\angle OBA:\sin\angle OBC=2:1$. Да се намери обема на пирамидата.

Задача 16. Дадена е правилна триъгълна пирамида с височина H. В нея е вписан куб с ръб a така, че в основата на пирамидата лежат четири от върховете на куба, в една от околните стени – два негови върха, а в останалите две стени – по един връх. Да се намери обема на пирамидата.

Задача 17. Всички ръбове на една триъгълна пирамида са равни помежду си. Ако радиусът на вписаната сфера в пирамидата е равен на $\sqrt{\frac{2}{3}}$, да се намерят:

а) радиуса на описаната сфера около пирамидата;

б) лицето на сечението на пирамидата с равнина, минаваща през центъра на вписаната сфера и която е успоредна на една от стените на пирамидата.

Задача 18. Основата на пирамидата $MABCD$ е равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \| CD$), малката основа CD и бедрата на който имат дължина 4, а острият му ъгъл е $60°$. Всички околни ръбове на пирамидата сключват с равнината на основата ъгли с големина $60°$. Да се намерят:

а) обема на пирамидата;

б) околната повърхнина на пирамидата и разстоянието от C до стената ABM.

Задача 19. Нека тетраедърът $ABCD$ има ръбове $AB = CD = a$, $BC = AD = b$ и $CA = BD = c$. Да се намери радиуса на описаната около тетраедъра сфера.

Задача 20. Основа на пирамидата $SABCD$ е правоъгълникът $ABCD$, диагоналът BD на който определя със страната BC ъгъл α. Околните ръбове на пирамидата имат дължина ℓ, а големината на $\angle ASC$ е равен на 2β. Пирамидата е пресечена с равнина, еднаквоотдалечена от всичките й върхове. Намерете лицето на сечението на пирамидата с тази равнина.

Задача 21. В правилна триъгълна призма два върха на горната основа са съединени със средите на противоположните страни на долната основа. Ъгълът, определен от получените прави е равен на $\frac{\pi}{3}$. Намерете обема на призмата, ако дължината на страната на основата е равна на a.

Задача 22. Основата на пирамида е правилен триъгълник със страна $\sqrt{6}$. Околните стени на пирамидата са равнолицеви. Един от околните ръбове е равен на $3\sqrt{2}$. Намерете обема на пирамидата.

Задача 23. Дадена е триъгълната пирамида $SABC$ с основа ΔABC. Околните ръбове на пирамидата са равни на ℓ, $\angle ASB = 2\alpha$, а околните стени са равнолицеви. Намерете обема на пирамидата.

Задача 24. Околната стена BCD на тетраедъра $DABC$ с основа ΔABC е остроъгълен триъгълник и е перпендикулярна на основата ABC, а лицата на другите две околни стени ABD и ACD са съответно S_1 и S_2. Ако O е проекцията на D в равнината на основата и $\frac{S_1}{S_2} = \frac{BO}{CO}$, да се докаже, че O лежи на ъглополовящата през върха A в ΔABC.

Задача 25. Дадена е правилна триъгълна призма с дължина на основния ръб a. Ъгълът между диагонал на околната стена и съседна околна стена е γ. Да се определят границите, в които се изменя γ и да се намери околната повърхнина на призмата.

Задача 26. Основата на четириъгълна пирамида е изпъкнал четириъгълник, двете страни на който са равни на 6, а другите две – на 10. Височината на пирамидата е равна на 7. Всички околни стени сключват с равнината на основата ъгъл $60°$. Да се намери обема на пирамидата.

Задача 27. В триъгълна пирамида $DABC$ с основа ΔABC ръбът AD има дължина 1 и е перпендикулярен на равнината ABC. Равнината BCD сключва с равнините ABC, ABD и ACD ъгли с големини съответно $45°$, $90°$ и $60°$. Да се пресметнат дължините на ръбовете на пирамидата.

Задача 28. Основата на четириъгълна пирамида $MABCD$ е квадратът $ABCD$, а околният ръб MD е перпендикулярен на равнината на основата.

а) Да се докаже, че около пирамидата може да се опише сфера.

б) Ако дължината на ръба MD е 2 см, а радиусът на описаната около пирамидата сфера е $\sqrt{3}$ см, да се намери големината на ъгъла между стените ABM и BCM.

Задача 29. В триъгълната пирамида $DABC$ основата ΔABC е равнобедрен и правоъгълен с хипотенуза $AB = b\sqrt{2}$. Равнините на стените ABD и ACD са перпендикулярни на основата, а ръбът BD сключва с равнината на основата ъгъл $60°$. Да се намерят:

а) обема на пирамидата.

б) големината на ъгъла φ между ръба CD и равнината ABD;

в) големината на двустенния ъгъл ψ с ръб BD.

§14. Сечение на многостен с равнина

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([M], гл.II, §14).

Задача 1. В правилна четириъгълна пирамида $MABCD$ височината е равна на основния ръб. Прекарана е равнина, минаваща през диагонала BD на основата и перпендикулярна на околния ръб CM.

а) В какво отношение тази равнина дели CM?

б) В какво отношение тази равнина дели обема на пирамидата?

Задача 2. В правилна триъгълна пирамидата $ABCD$ с основа ΔABC, $AB = a$ и $CD = a\sqrt{3}$. Равнината β е успоредна на ръбовете AB и CD, пресича пирамидата и се намира на дадено разстояние m от средата на ръба AB. Намерете лицето на полученото сечение на пирамидата с равнината β.

Задача 3. Основата на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е равнобедрен трапец $ABCD$ с остър ъгъл α, описан около кръг с радиус r. През бедрото BC на трапеца и върха D_1 е прекарана равнина, образуваща с равнината на основата ъгъл

α. Да се намери лицето на околната повърхнина на призмата и лицето на сечението.

Задача 4. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $MABCD$ с връх точка M, за която основният ръб е равен на a и ъгълът между околна стена и основата е равен на 2α.

а) През точките A и C е прекарана равнина β, успоредна на BM. Да се намери лицето на сечението на пирамидата с равнината β.

б) Да се намери отношението $\dfrac{R}{r}$ като функция на α, където R е радиусът на описаната около пирамидата сфера, а r е радиусът на вписаната в пирамидата сфера. Намерете най-малката стойност на това отношение.

Задача 5. Дадена е правилна четириъгълна пирамидата с основа $ABCD$ и връх M, като $AM = 6$ и ъгълът между AM и равнината на основата е $30°$. Да се намерят:

а) обема на пирамидата;

б) лицето на сечението на пирамидата с равнина,която е успоредна на основата и дели височината на пирамидата в отношение $2:25$, считано от върха M.

Задача 6. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основен ръб $AB = a$ и околен ръб $AM = a\sqrt{2}$.

а) Да се докаже, че равнините ACM и BDM са перпендикулярни и да се намери обема на пирамидата.

б) През върха A на пирамидата е прекарана равнина μ, перпендикулярна на околния ръб CM. Да се определи вида на сечението на пирамидата с равнината μ и да се намери лицето му.

Задача 7. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб a и двустенен ъгъл при основата α.

а) Да се намери обема на пирамидата, ако $a = 6$ см и $\alpha = 45°$.

б) Равнината γ минава през основен ръб на пирамидата и образува с основата ъгъл β, $0 < \beta < \alpha$. Да се намери лицето на сечението на пирамидата с равнината γ.

Задача 8. Дадена е четириъгълна пирамида $MABCD$ с равни околни ръбове и основа $ABCD$ - правоъгълник. Ако $AB = 8$ см, $BC = 6$ см и височината на пирамидата е 2 см, да се намери:

а) околната повърхнина на пирамидата;

б) лицето на сечението на пирамидата с равнината, минаваща през диагонала BD и успоредна на околния ръб AM.

Задача 9. В триъгълна пирамидата $ABCD$ ръбът DC е перпендикулярен на основата ABC и има дължина $\sqrt{3}$ см. Височината DM ($M \in AB$) в околната стена ABD сключва с основата на пирамидата ъгъл с мярка $60°$, а $\angle ACM = 30°$ и $\angle MCB = 45°$.

а) Да се намери лицето на ΔCDM.

б) Да се намери обемът на пирамидата.

в) Да се намери лицето на сечението на пирамидата с равнина, минаваща през ръба AB и сключваща с основата на пирамидата ъгъл с мярка φ.

Задача 10. Дадена е правилна триъгълна пирамидата $ABCD$ с дължина на основния ръб a и мярка φ на ъгъла между околна стена и основата ABC.

а) Да се намерят пълната повърхнина на дадената пирамида и обемът на пирамидата $A_1B_1C_1D$, където A_1, B_1 и C_1 са средите на апотемите съответно в околните стени BCD, CAD и ABD.

б) Да се намери лицето на сечението на дадената пирамида с равнина, минаваща през центъра на нейната основа и през средите на две от апотемите ѝ.

Задача 11. Височината SO на правилна четириъгълна пирамида $SABCD$ е равна на H, а големината на ъгъла ASC (AS и CS са противоположни околни ръбове) е равна на 2α. На правата SO е взета точка K, за която $SK:SO_1 = 1:3$, където O_1 е център на описаната около пирамидата сфера. Намерете лицето на сечението на пирамидата с равнина, успоредна на равнината на основата на пирамидата и минаваща през точка K.

Задача 12. Основата на пирамидата $MABCD$ е равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB||CD$) с голяма основа $AB = a$ и $\cos\angle BAD = \dfrac{2}{3}$. Всяка околна стена на пирамидата образува с равнината на основата двустенен ъгъл $60°$. През ръба CD е прекарана равнина α, която пресича околните ръбове MA и MB съответно в точките E и F, така, че $EF = CD$.

а) Да се намери обема на пирамидата.

б) Да се определи вида на сечението на пирамидата с равнината α.

в) Да се намери лицето на това сечение.

Задача 13. Даден е кубът $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с лице на пълната повърхнина равно на 5. Точките M, N и P са среди съответно на ръбовете AB, AD и D_1C_1.

а) Да се намери обема и лицето на пълната повърхнина на пирамидата $AMNP$.

б) Построена е равнина през токите M, N и P. Да се определи видът на сечението на равнината с куба и косинусът на ъгъла между равнината и основата на куба.

Задача 14. Дадена е пирамидата $SABC$ с основа триъгълник ABC. Точките E и D лежат съответно на ръбовете SA и SB, при това $SE:EA = SD:DB = 1:2$. През точките E и D е прекарана равнина, успоредна на ръба SC. В какво отношение тази равнина дели обема на пирамидата?

Задача 15. Височината на правилна триъгълна призма е h. Равнина ε минава през средна отсечка на долната основа и през успореден на нея ръб на горната основа. Да се намери лицето на полученото сечение S, ако ъгълът между ε долната основа е φ.

Задача 16. Основният ръб на правилна четириъгълна пирамида $MABCD$ с основа $ABCD$ има дължина a, а ъгълът между два съседни околни ръба е два пъти по-голям от ъгъла, който околните ръбове сключват с равнината на основата.

а) Да се намери обема на пирамидата.

б) Равнината ρ минава през средите на основните ръбове AB и CD и е перпендикулярна на стената (BCM). Да се определи вида на сечението на равнината ρ с пирамидата и да се намери лицето му.

Задача 17. Всеки ръб на правилна триъгълна призма има дължина a. През основния ръб и средата на отсечката, съединяваща центровете на двете основи е прекарана равнина λ. Да се намери лицето на полученото сечение и ъгъла между λ и основата.

Задача 18. Дадена е правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$, в която $AC=6$, $AA_1=8$. През върха A е прекарана равнина, пресичаща околните ръбове BB_1 и CC_1 съответно в точките M и N. Да се намери в какво отношение тази равнина дели обема на призмата, ако $MB=MB_1$ и AN е ъглополовяща на $\angle CAC_1$.

Задача 19. Сечението на куб с равнина е правилен шестоъгълник и има лице S. Да се намери ръба на куба.

Задача 20. В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ върху основните ръбове AD и BC са избрани съответно точките M и N така, че $AM:MD=CN:NB=3:1$. През точките M, N и C_1 е построена равнина λ. Да се намерят:

а) косинуса на ъгъла, който λ сключва с равнината на околната стена CDD_1C_1 на куба;

б) отношението на обемите на двата многостена, на които равнината λ разделя куба.

Задача 21. В триъгълната пирамида $ABCP$ ръбът $AP=a$, $BC=b$. Ъгълът, определен от кръстосаните прави AP и BC е φ. През точка $N\in AB$ е прекарана равнина α, успоредна на AP и BC.

а) Да се докаже, че сечението на пирамидата с α е успоредник, чието лице S удовлетворява неравенството $S\le\dfrac{a\,b}{4}\sin\varphi$. Да се намери при кое положение на $N\in AB$ се достига равенство.

б) Да се докаже, че точката N може да се избере така, че сечението да бъде ромб.

Задача 22. Основният ръб и височината на правилна четириъгълна пирамида имат дължина a.

а) Да се намери лицето на околната повърхнина на пирамидата и радиуса на описаната около нея сфера.

б) Да се намери косинуса на ъгъла, заключен между околна стена и диагонално сечение.

Задача 23. В правилната четириъгълна пирамидата $MABCD$, в която височината е равна на диагонала на основата $ABCD$, е прекарана равнина през върха A, успоредна на BD, която се допира до вписаната в пирамидата сфера. Да се докаже, че лицето на полученото сечение е три пъти по-малко от лицето на основата на пирамидата.

Задача 24. Права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ има основа $ABCD$, която е равнобедрен трапец с остър ъгъл φ и радиус на вписаната окръжност r ($AB > CD$). През точките A, D и B_1 е прекарана равнина π, която сключва с равнината на основата $ABCD$ ъгъл φ.

а) Да се намери лицето на сечението на призмата с равнината π, както и лицето на околната повърхнина на призмата.

б) Ако $\varphi = 60°$, да се намери обема на частта от призмата, отсечена от равнината, която съдържа точката B.

Задача 25. Основата ABC на триъгълна пирамида $ABCD$ е равностранен триъгълник, а околният ръб AD е перпендикулярен на основата на пирамидата. Лицето на околната стена BCD се отнася към лицето на основата ABC както $2:\sqrt{2}$. Ако радиусът на вписаната в пирамидата сфера е r см, намерете:

а) обема на пирамидата;

б) лицето на сечението на пирамидата с равнина, минаваща през основния ръб BC и центъра O на вписаната сфера.

Задача 26. Права призма $ABCA_1B_1C_1$ има за основа равнобедрен триъгълник ABC с ъгли при основата AB равни на $\alpha > 60°$. Разликата между лицата на две околни стени на призмата е S. През върха B и средата на ръба AA_1 е прекарана равнина, успоредна на височината на основата през върха C.

а) Да се построи сечението на равнината с призмата.

а) Да се намерят лицата на основата и на сечението, ако равнината на сечението сключва с равнината на основата ъгъл β.

Задача 27. През върха B_1 на куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е прекарана равнина, пресичаща ръбовете BC и AB и образуваща ъгъл α със стената $ABCD$, при което полученото сечение е равнобедрен триъгълник. Намерете лицето на сечението, ако ръбът на куба е равен на a.

Задача 28. Дължината на апотемата на околна стена на правилна триъгълна пирамида е равна на k. Пирамидата е пресечена с равнина, равноотдалечена от всичките й върхове. Намерете лицето на полученото сечение, ако околният ръб на пирамидата образува с равнината на основата ъгъл β.

Задача 29. В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точките M, N, P са среди съответно на ръбовете BC, C_1D_1, AA_1. Намерете отношението на обемите на многостените, на които равнината (MNP) разделя куба.

Задача 30. В правоъгълния паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръбове $AB = 5\sqrt{2}$, $AD = 3\sqrt{2}$, $AA_1 = 8$ през диагонала BD_1 е прекарана равнина, пресичаща ръба AA_1 така, че сечението на паралелепипеда с тази равнина има най-малък периметър. Намерете ъгъла, който сключва равнината на сечението със стената $(ABCD)$.

§15. Цилиндър. Конус. Сфера

В този параграф съществено се използват основните понятия и теореми, разгледани в ([M], Гл.II, §15).

Задача 1. Лицето на основното сечение на цилиндър е равно на Q, а диагоналът на това сечение сключва с равнината на основата ъгъл α. Да се намери обема на цилиндъра.

Задача 2. Конус и цилиндър имат обща основа, като върхът на конуса се намира в центъра на другата основа на цилиндъра. Да се намери синусът на ъгъла между оста на конуса и образувателната му, ако лицето на пълната повърхнина на цилиндъра се отнася към лицето на пълната повърхнина на конуса както $7:4$.

Задача 3. Да се намери отношението между обема на кълбо и обема на цилиндър, вписан в кълбото, ако по-малкият ъгъл между диагоналите на осното сечение на цилиндъра е α и диаметърът на основата му е по-голям от височината на цилиндъра.

Задача 4. Два прави кръгови конуса имат обща височина, като върховете им съвпадат с противоположните краища на височината. Образователната на единия конус е ℓ и сключва с височината ъгъл α, а образувателната на другия конус сключва с височината ъгъл β. Да се намери обема на общата част на двата конуса.

Задача 5. Дадена е пирамида с основа ΔABC и връх M, като околните ръбове имат дължини $AM = 3$, $BM = CM = 4$ и са два по два взаимно перпендикулярни. Нека точка P е средата на ръба CM, а r, r_1 и r_2 са радиусите на вписаните кълба, съответно в пирамидите $ABCM$, $ABCP$ и $ABPM$.

а) Да се намери радиуса r.

б) Да се докаже, че $\frac{2}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{13}{6}$.

Задача 6. В прав кръгов конус е вписана сфера с лице на повърхнината два пъти по-малко от лицето на пълната повърхнина на конуса. Да се намери отношението на обемите на двете тела.

Задача 7. В триъгълника ABC дължината на страната BC е a, а прилежащите към нея ъгли имат големини α и $90° + \alpha$. Да се намери обемът на тялото, получено при въртенето на този триъгълник около височината, спусната от A към BC.

Задача 8. Ромб с дължина на страната a и остър ъгъл α се върти около ос, която минава през върха на единия от острите му ъгли и е перпендикулярна на едната от страните на ромба. Да се намери лицето на повърхнината на полученото ротационно тяло.

Задача 9. В прав кръгов пресечен конус е вписано кълбо. Обемът на кълбото е равен на половината от обема на конуса. Да се намери тангенсът на ъгъла β, заключен между образуващата и основата на конуса.

Задача 10. Три хорди на сфера, излизащи от една точка от нейната повърхност, са равни на a. Ъглите между хордите са равни на $60°$. Намерете радиуса на сферата.

Задача 11. Тяло се състои от два конуса, имащи обща основа и разположени в различни полупространства относно равнината на основата. Намерете обема на кълбото, вписано в тялото, ако радиусите на основите на конусите са равни на 1, а височините – на 1 и 2.

Задача 12. Големината на двустенен ъгъл $(\alpha;\beta)$ е $\frac{\pi}{3}$. В него е вписана сфера ω_1, която се допира до α точка A. Втора вписана в двустенния ъгъл сфера ω_2 се допира до β в точка B и до ω_1. Отсечката AB пресича ω_1 в точка K и ω_2 в точка L. Да се намери отношението $AK:KL$.

Задача 13. Върху равнина са поставени два цилиндъра с радиуси r на основата, които се допират по образувателна. Върху тях са поставени два други цилиндъра с радиуси на основата равни на R, допиращи се по образувателна, така че осите им са перпендикулярни на осите на първите два цилиндъра. Да се намери радиуса на сферата, която се допира до всичките четири цилиндъра.

Задача 14. Цилиндър с радиус R се допира до равнина α по образувателна. Две сфери, с радиуси r ($r<R$), се допират външно помежду си, до равнината α и до околната повърхнина на цилиндъра. Да се намери радиуса r_1 ($r_1<r$) на сфера, която се допира до равнината α, до околната повърхнина на цилиндъра и до двете сфери.

Задача 15. Две перпендикулярни равнини пресичат сфера с радиус 7 см в две еднакви пресичащи се окръжности с обща хорда 2 см. Намерете радиусите на тези окръжности.

Задача 16. Дадени са куб и три сфери, първата от които е описана около куба, втората се допира до ръбовете му, а третата е вписана в него. Намерете отношението на лицата на повърхнините на сферите и отношението на обемите им.

Задача 17. В сфера с радиус R е вписан правилен тетраедър. В тетраедъра е вписан цилиндър, а в него – кълбо. Намерете обема на кълбото.

Задача 18. В правилна четириъгълна пирамида центровете на вписаната и описаната сфери съвпадат. Да се намери косинусът на двустенния ъгъл при основата на пирамидата.

Задача 19. Частното на височината на един конус и радиуса на описаната около конуса кълбо е m. Да се намери частното от обемите на двете тела.

Задача 20. В кълбо, радиусът на което е R, е вписан конус. В този конус е вписан цилиндър с квадратно осно сечение. Ъгълът, заключен между образувателната на конуса и равнината на основата му е равен на φ. Да се намерят:

а) обема на конуса;

б) лицето на пълната повърхнина на цилиндъра.

Задача 21. Около сфера с радиус R е описан куб. Да се намери радиусът на сферата, която се допира до дадената сфера и до три стени на куба с общ връх.

Задача 22. В триъгълна пирамида околният ръб CD е перпендикулярен на равнината на основата ABC, $CD=3$, $AC=BC=5$ и $AB=6$. Сфера с център O върху ръба AC се допира до стените (BCD) и (ABD). Да се намери разстоянието от O до C.

Задача 23. Правилен тетраедър със страна a е вписан в прав кръгов цилиндър така, че два от върховете на тетраедъра лежат на окръжността на едната основа на цилиндъра, а другите два – на окръжността на другата основа на цилиндъра. Намерете височината на цилиндъра.

Задача 24. Дължината на образувателната на прав кръгов конус е ℓ, а ъгълът между образувателната и равнината на основата е α. Да се намери обема на описаната около конуса пирамида с основа ромб с остър ъгъл β.

Задача 25. Да се намери повърхнината на сфера, вписана в пирамида, основата на която е триъгълник със страни 13, 14 и 15, ако върхът на пирамидата е на разстояние 5 от всеки основен ръб.

Задача 26. Измежду образувателните на прав кръгов конус, с дължина λ, има и такива, които са взаимноперпендикулярни. Две от тях разделят окръжността на основата му на части в отношение $1:2$. Да се намерят лицето на пълната му повърхнина и обема на конуса.