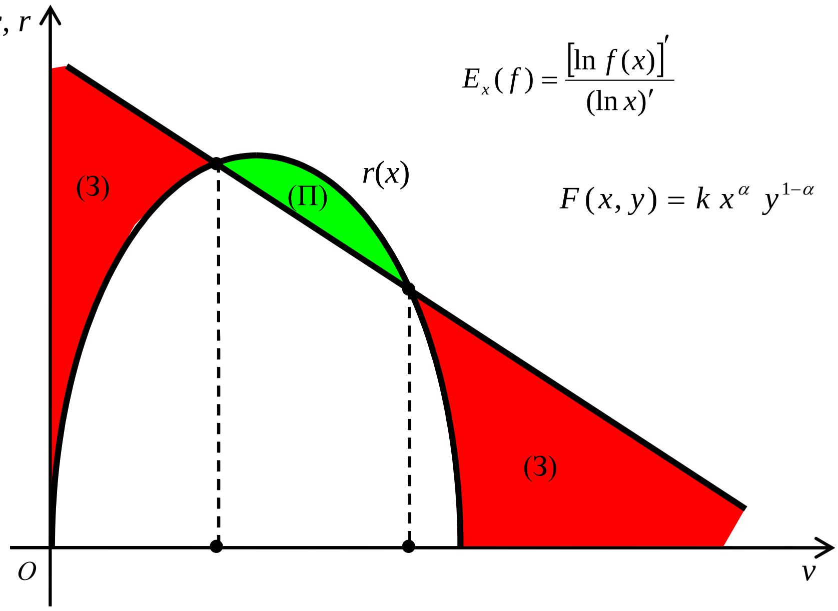
ДИМЧО СТАНКОВ



МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

за студенти по икономика

2007

П Р Е Д Г О В О Р

Настоящият учебник е предназначен за студентите от специалност ***Икономика*** на Шуменския университет "Епископ Константин Преславски". Той е съобразен с учебната програма на дисциплината Математика - втора част (Математически анализ) от учебния план. В него са разгледани понятия и твърдения от математическия анализ като:

- реални числа и числова ос;
- основни елементарни функции;
- производна и диференциал на функция;
- теореми за средните стойности;
- приложения на производната за изследване на функция;
- редове от реални числа и степенни редове;
- примитивна функция и неопределен интеграл;
- определен интеграл и приложения;
- функции на две и повече променливи;
- някои видове обикновени диференциални уравнения.

В учебника са намерили място и някои приложения на математическия анализ в икономиката като:

- маргинални величини в икономиката;
- еластичност на търсенето;
- оптимизационни модели;
- равновесни точки;
- точка на спадащ доход;
- производствена функция на Коб-Дъглас;
- взаимовръзки между два продукта;
- интерполиране на функции.

Съдържанието на учебника е разпределено в двадесет и пет теми (въпроси от конспекта). Във всяка от тях има достатъчно на брой примерни решени задачи, демонстриращи основни методи разгледани в теоретичната част. Накрая се предлагат задачи за самостоятелна работа.

Много от твърденията в учебника са приведени без доказателства. Доказателствата на останалите не винаги са строги и често са изложени на базата на геометрични (нагледни) заключения. Целта е бързото усвояване на свойствата на разглежданите фундаментални математически операции (граничен преход, диференциране, интегриране и други), математически характеристики (монотонност, екстремум, изпъкналост, вдлъбнатост и други), както и методите за решаването на основните задачи. За по-пълно изучаване или запознаване с други подходи към учебното съдържание читателят може да ползва учебните помагала от посочената литература.

Структурата на учебника и съдържанието му са такива, че той може да бъде използван с успех и от студентите, обучаващи се чрез Центъра за дистанционно обучение на Шуменския университет. Наличието на голямо количество решени и нерешени задачи са предпоставка за задълбочена самостоятелна работа, а също така за качествено изготвяне на курсови работи и други задания на студентите.

Авторът изказва своята благодарност на рецензента доц. д-р Георги Георгиев за прецизната и задълбочена рецензия. Изказвам благодарност и на Снежана Стойчева за акуратната предпечатна подготовка на книгата, без помощта на която отпечатването й щеше да е невъзможно.

февруари 2007 г. От автора

гр. Шумен

1. Реални числа и числова ос. Координатна система в равнината

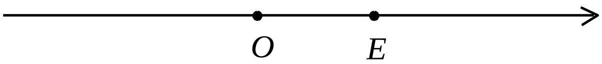
Реалните числа са числата, които могат да бъдат представени, като безкрайни десетични дроби. Например:

$$9 = 9{,}00000\ldots$$
$$-\frac{13}{3} = -4{,}333\ldots$$
$$\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$$
$$\pi = 3{,}14159\ldots$$
$$\sqrt{7} = 2{,}6457513\ldots.$$

Многоточието означава, че редицата от цифри продължава безкрайно. Докато в първите три примера е ясно, че се повтаря една и съща цифра (съответно 0, 3 и 6), то за $\sqrt{7}$ и π това не е така. Периодичните безкрайни десетични дроби се наричат рационални числа, а непериодичните - ирационални числа. Означаваме тези множества съответно с Q и I. Тогава множеството R на реалните числа (всички безкрайни десетични дроби) е обединението на Q и I, т. е. $R = Q \cup I$.

Реалните числа служат преди всичко за измерване на различни величини. Например измерваме дължината на дадена отсечка и по такъв начин й съпоставяме положително число. Обратно всяко положително число изразява дължината на някаква отсечка. Именно на това се основава геометричното представяне на реалните числа като точки от една права, която се нарича числова ос (фиг.1).

!! ***Дефиниция 1.*** Числова ос се нарича права, на която са избрани определена точка O (начало на отчитането), мащабна отсечка OE, дължината на която приемаме равна на единица и положителна посока (от O към E).



Фиг.1

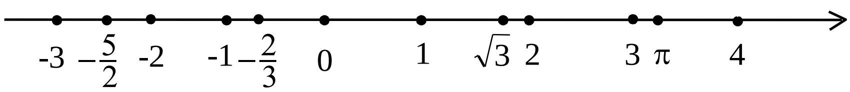
На всяко положително реално число x може да се съпостави точка от числовата ос, надясно от началото O, която е на разстояние x от O. На всяко отрицателно реално число x - точка наляво от O, която е на разстояние $(-x)$ от O. На числото нула се съпоставя точката O. По такъв начин се получава взаимно еднозначно съответствие между множеството R на реалните числа и множеството на всички точки от числовата ос, а именно:

1) на всяко реално число съответства точно една точка от числовата ос;
2) на различни реални числа съответстват различни точки от числовата ос;
3) всяка точка от числовата ос съответства на някакво реално число.

Поради тази причина R се нарича числова ос, вместо реално число се казва точка от числовата ос, а R и числовата ос се отъждествяват. От училищния курс е известно, че реалните числа можем да събираме, изваждаме, умножаваме и делим (стига да не е на нула) и сравняваме по големина. Последното се записва по следния начин:

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ лежи от ляво на } y \text{ (като точка от числовата ос).}$$

Проверете вярно ли са подредени числата върху числовата ос на фиг.2.



Фиг.2

По-важни подмножества на R са следните:

1) $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ - множеството на естествените числа.

2) $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ - множеството на целите числа.

3) $Q = \left\{ \dfrac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in Z,\ n \neq 0 \right\}$ - множеството на рационалните числа, т. е. периодичните безкрайни десетични дроби.

4) I - множеството на ирационалните числа, т. е. непериодичните безкрайни десетични дроби.

Да отбележим, че $N \subset Z \subset Q$. В N са изпълними само операциите събиране и умножение, в Z - операциите събиране, умножение и изваждане, а в Q - всички аритметични операции. Да припомним как се извършват:

$$\frac{m_1}{n_1} \pm \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1.n_2 \pm m_2.n_1}{n_1.n_2}$$

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1.m_2}{n_1.n_2}$$

$$\frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1.n_2}{n_1.m_2} \qquad (m_2 \neq 0).$$

Освен четирите аритметични действия с реалните числа могат да се извършват и действията повдигане на степен и коренуване:

$$x^n = \underbrace{x\ .\ x\ \dots x}_{n\ \text{пъти}}, \quad x \in R, \quad n \in N$$

$$x^0 = 1,\ x > 0 \quad \text{и} \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \neq 0 \quad \text{и} \quad n \in N$$

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}, \quad x > 0, \quad p \in N, \quad q \in N.$$

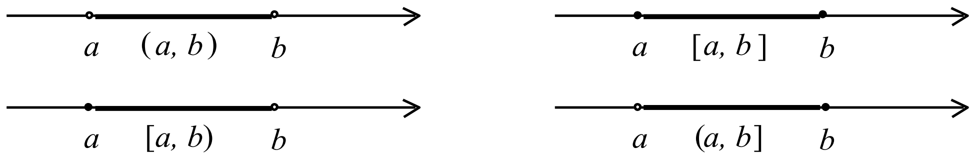
С всеки две реални числа $a < b$ се свързват следните видове интервали (фиг.3):

1) $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$ - отворен интервал с краища a и b;

2) $[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$ - затворен интервал с краища a и b;

3) $[a,b) = \{x \in R : a \le x < b\}$ - затворен отляво и отворен отдясно;

4) $(a,b] = \{x \in R : a < x \le b\}$ - отворен отляво и затворен отдясно.



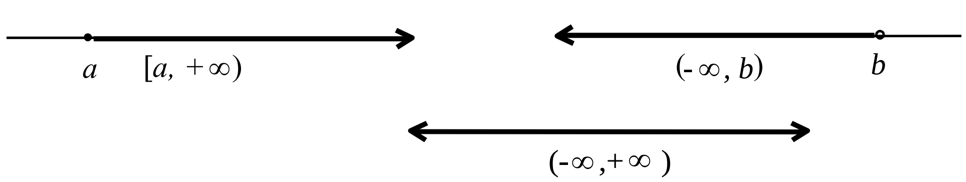
Фиг.3

Тези интервали са крайни интервали - всеки от тях има крайна дължина $b - a$. Интервалите могат да имат и безкрайна дължина, т.е. да бъдат безкрайни (фиг.4):

1) $[a,+\infty) = \{x \in R : x \ge a\}$ или $(a,+\infty) = \{x \in R : x > a\}$, където $a \in R$;

2) $(-\infty,b] = \{x \in R : x \le b\}$ или $(-\infty,b) = \{x \in R : x < b\}$, където $b \in R$;

3) $(-\infty,+\infty) = R$.

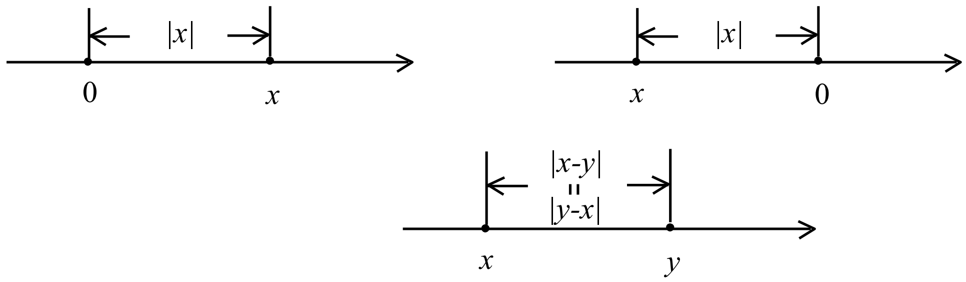


Фиг.4

За всяко реално число x, числото

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ако} \quad x > 0 \\ 0, & \text{ако} \quad x = 0 \\ -x, & \text{ако} \quad x < 0 \end{cases}$$

се нарича абсолютна стойност или модул на x. Да отбележим, че $|x| \geq 0$ и $|x| = |-x|$ за всяко реално число x. Геометрично $|x|$ представлява разстоянието от x до O върху числовата ос. По-общо $|x-y|$ е разстоянието между точките x и y върху числовата ос (фиг.5):



Фиг.5

Свойства на абсолютната стойност:

1. $|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{или} \quad x = -y$

2. $|x.y| = |x|.|y| \quad \text{и} \quad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

3. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ - неравенство на триъгълника

4. $|x| = c \quad \Leftrightarrow \quad x = -c \quad \text{или} \quad x = c$

$|x| < c \quad \Leftrightarrow \quad -c < x < c$

$|x| \leq c \quad \Leftrightarrow \quad -c \leq x \leq c$

$|x| > c \quad \Leftrightarrow \quad x < -c \quad \text{или} \quad x > c$

$|x| \geq c \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -c \quad \text{или} \quad x \geq c$

Пример 1. Решете уравненията:

1. $5x-3=1$; **2.** $2-x=4x+7$; **3.** $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+7}{4}=5$; **4.** $\dfrac{y}{y-2}+\dfrac{3-y}{y+1}=0$;

5. $3(x+1)-\dfrac{10-x}{2}=\dfrac{4x+11}{5}+12$; **6.** $|3x-1|=5$; **7.** $|2-3t|=1$;

8. $|2x-1|=|x+4|$.

Решение: **1.** $5x-3=1 \Leftrightarrow 5x=1+3=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{5}$.

2. $2-x=4x+7 \Leftrightarrow -x-4x=7-2 \Leftrightarrow -5x=5 \Leftrightarrow x=-1$.

3. $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+7}{4}=5 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+7}{4}-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{4(x-1)-3(3+7)-60}{12}=0 \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{4x-4-3x-21-60}{12}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-85}{12}=0 \Leftrightarrow x-85=0 \Leftrightarrow x=85$.

4. Дефиниционното множество на даденото уравнение се определя от условията $y \neq 2$ и $y \neq -1$.

$$\frac{y}{y-2}+\frac{3-y}{y+1}=0 \Leftrightarrow \frac{y(y+1)+(3-y)(y-2)}{(y-2)(y+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{y^2+y+3y-6-y^2+2y}{(y-2)(y+1)}=0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{6y-6}{(y-2)(y+1)}=0 \Leftrightarrow 6y-6=0 \Leftrightarrow y=1.$$

5. $3(x+1)-\frac{10-x}{2}=\frac{4x+11}{5}+12 \Leftrightarrow \frac{30(x+1)-5(10-x)-2(4x+11)-120}{10}=0 \Leftrightarrow$
$30x+30-50+5x-8x-22-120=0 \Leftrightarrow 27x-162=0 \Leftrightarrow 27x=162 \Leftrightarrow$
$x=\frac{162}{27}=6$.

6. $|3x-1|=5 \Leftrightarrow 3x-1=5$ или $3x-1=-5 \Leftrightarrow 3x=6$ или $3x=-4 \Leftrightarrow x=2$ или $x=-\frac{4}{3}$.

7. $|2-3t|=1 \Leftrightarrow 2-3t=1$ или $2-3t=-1 \Leftrightarrow -3t=1-2$ или $-3t=-1-2 \Leftrightarrow$
$-3t=-1$ или $-3t=-3 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$ или $t=1$.

8. $|2x-1|=|x+4| \Leftrightarrow 2x-1=x+4$ или $2x-1=-(x+4) \Leftrightarrow 2x-x=4+1$ или
$2x-1=-x-4 \Leftrightarrow x=5$ или $x=-1$.

Пример 2. Решете неравенствата:

1. $12x-3\ge 3$; **2.** $3(2-x)<2(3+x)$; **3.** $\frac{x}{4}-\frac{2+7x}{8}>1-\frac{5x}{6}$;

4. $|2x-3|\le 1$; **5.** $\left|\frac{x}{2}-1\right|>3$.

Решение: **1.** $12x-3\ge 3 \Leftrightarrow 12x\ge 3+3 \Leftrightarrow 12x\ge 6 \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{2}$.

2. $3(2-x)<2(3+x) \Leftrightarrow 6-3x<6+2x \Leftrightarrow -3x-2x<6-6 \Leftrightarrow -5x<0 \Leftrightarrow x>0$.

3. $\frac{x}{4}-\frac{2+7x}{8}>1-\frac{5x}{6} \Leftrightarrow \frac{x}{4}-\frac{2+7x}{8}-1+\frac{5x}{6}>0 \Leftrightarrow \frac{6x-3(2+7x)-24+20x}{24}>0 \Leftrightarrow$
$\frac{6x-6-21x-24+20x}{24}>0 \Leftrightarrow \frac{5x-30}{24}>0 \Leftrightarrow 5x-30>0 \Leftrightarrow 5x>30 \Leftrightarrow x>6$.

4. $|2x-3|\le 1 \Leftrightarrow -1\le 2x-3\le 1 \Leftrightarrow 2\le 2x\le 4 \Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

5. $\left|\frac{x}{2}-1\right|>3 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-1<-3$ или $\frac{x}{2}-1>3 \Leftrightarrow \frac{x}{2}<-3+1$ или $\frac{x}{2}>3+1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}<-2$ или
$\frac{x}{2}>4 \Leftrightarrow x<-4$ или $x>8$.

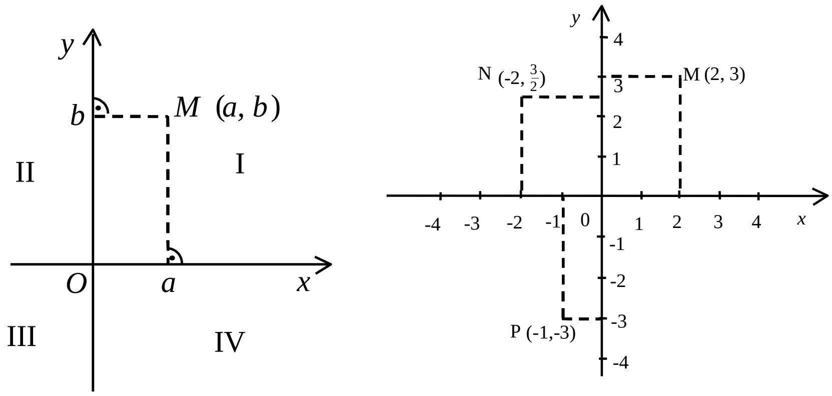
! ! ***Дефиниция 2.*** Координатна система в равнината се нарича двойка пресичащи се оси с общо начало, взети в определен ред. Началото се означава с O, първата координатна ос се означава с Ox, а втората с Oy.

Когато осите са перпендикулярни и единичните отсечки по тях са равни, координатната система се нарича декартова координатна система в равнината.

Точката O се нарича начало на координатната система, оста Ox се нарича абсцисна ос, оста Oy - ординатна ос.

Да завъртим на ъгъл равен на 90° около точката O положителната полуос Ox до съвпадането ѝ с положителната полуос Oy. Ако това завъртане става в посока обратна на посоката на часовниковата стрелка, то декартовата координатна система Oxy се нарича дясно ориентирана. Ние ще работим с дясно ориентирана декартова координатна система (фиг.6).

Нека M е произволна точка от равнината и при ортогоналното ѝ проектиране върху координатните оси Ox и Oy сме получили съответно числата a и b. Числото a се нарича абсциса или първа координата на M, а числото b се нарича ордината или втора координата на M. Всичко това записваме така: $M(a, b)$. По такъв начин на всяка точка от равнината се съпоставя точно една наредена двойка от реални числа - координатите на точката. Обратно на всяка наредена двойка от реални числа може да се съпостави точно една точка от равнината - точката с тези координати. Ясно е, че точката O има координати $(0, 0)$, координатите на всяка точка от абсцисната ос са от вида $(x, 0)$, а на всяка точка от ординатната ос - от вида $(0, y)$, където $x \in R$ и $y \in R$.



Фиг. 6

Координатните оси разбиват равнината на четири множества (фиг.6). Всяко от тези множества се нарича квадрант. Ако $M(x, y)$ е произволна точка от равнината, то

M е от първи квадрант $\Leftrightarrow$ $x > 0$ и $y > 0$;

M е от втори квадрант $\Leftrightarrow$ $x < 0$ и $y > 0$;

M е от трети квадрант $\Leftrightarrow$ $x < 0$ и $y < 0$;

M е от четвърти квадрант $\Leftrightarrow$ $x > 0$ и $y < 0$.

! ***Задачи за самостоятелна работа***

1. Решете уравненията:

а) $-11x + 2 = -20$; б) $y - 5 = -3y + 1$; в) $\dfrac{x+2}{5} - \dfrac{3-2x}{4} = 1$;

г) $\dfrac{t-1}{t} - \dfrac{t+2}{t+3} = 0$; д) $|5x - 4| = 1$; е) $|3 - 2y| = 4$;

ж) $|1 - 6x| = |x + 2|$; з) $|2x - 7| = |4 - 3x|$.

2. Решете неравенствата:

а) $4x - 9 < 7$; б) $6(3 - x) - 2 \geq 3(x - 1)$; в) $\dfrac{y}{3} - \dfrac{3-2x}{4} \leq 2 - \dfrac{7x}{12}$;

г) $|5x - 7| \geq 2$; д) $\left|2 - \dfrac{x}{3}\right| < 12$; е) $2 - |x - 4| > 8$.

2. Функция на една реална променлива - основни понятия. Операции с функции

При изследването на процесите и явленията от реалния свят ние изучаваме едни или други характеризиращи ги величини, които можем да измерим. Много често изменението на една величина е причина за изменението на друга. Някои от величините свързани с даден процес или явление, при известни условия остават постоянни, а други се променят. За това говорим за постоянни и променливи величини. Променливи величини са например: температурата на въздуха и водата; броят на индивидите в една популация; курсът на лева; печалбата на дадена фирма; цената на дадена стока, която се формира на свободния пазар; скоростта, с която се движи автобусът и други.

Пример 1. Фирма планира да произведе и да предложи на пазара нов продукт. След направените проучвания на търсенето, възможностите на конкуренцията и на собствения опит специалистите на фирмата установяват следното:

а) връзката между единичната цена x на продукта и месечния обем v на произведената и продадена продукция е $v(x)=3000-20x$;

б) връзката между обема v и разходите c е $c(v)=18000+15v$.

Да се изразят разходите чрез цената и се направят прогнози за приходите и печалбата на фирмата от новото производство.

Тъй като $v(x)$ е обема на продадената продукция на цена x, то $v(x)=3000-20x$ се нарича още ***функция на търсенето***.

Аналогично $c(v)=18000+15v$ се нарича ***функция на разходите***. Тук 18000 лв са постоянните разходи, 15 лв са разходите за производството на единица продукция, а $15v$ са променливите разходи. Като заместим $v(x)$ в $c(v)$ ще получим разходите, изразени чрез цената x;

$$c(x)=18000+15(3000-20x)=63000-300x$$

Тази зависимост също се нарича функция на разходите.

За да намерим приходите r трябва да умножим обема v на продадената продукция и цената x на единица продукция, т. е. $r=v.x$. Така получаваме следната ***функция на приходите***:

$$r(x)=(3000-20x).x=3000x-20x^2.$$

Прогнозата за печалбата p на фирмата получаваме като разликата между приходи и разходи, т. е. $p=r-c$. След като заместим получаваме ***функцията на печалбата***:

$$p(x)=r(x)-c(x)=3000x-20x^2-(63000-300x)=$$
$$=-20x^2+3300x-63000\ .$$

В този пример месечния обем, разходите, приходите и печалбата на фирмата успяхме да изразим чрез цената x на единица продукция, т. е. те зависят от x. От друга страна и цената може също да се променя. Тогава е естествено x да наречем независима променлива, а обема, разходите, приходите и печалбата - зависими променливи.

Математиката се абстрахира от спецификата на величините (променливите), които свързваме с даден процес или явление. За нея е важна взаимната връзка, т.е. правилото (закона) на изменението на една от тях, в зависимост от другата (или другите).

! ! ***Дефиниция 1.*** Казва се, че в множеството $D\subset R$ е дефинирана функция на една променлива, ако по дадено правило (закон) f на всяка стойност на $x\in D$ е съпоставено точно едно реално число y. В този случай пишем $y=f(x)$ и дадената функция означаваме накратко с f.

Променливата x се нарича независима променлива или аргумент.

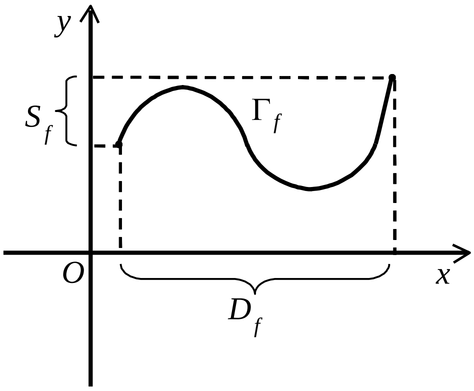
Променливата y се нарича зависима променлива или функция.

Множеството D се нарича дефиниционна област на функцията f и затова се означава често с D_f.

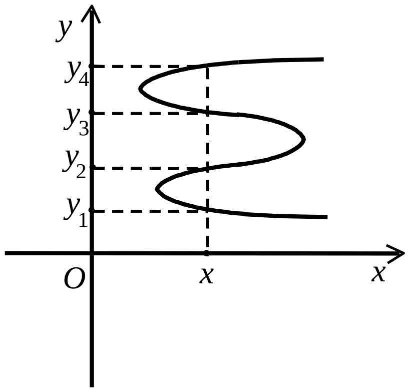
Множеството от стойности, които приема зависимата променлива се нарича област на изменение или множество от функционални значения на функцията f и се означава с S_f.

Графика на функцията $y = f(x)$ за $x \in D_f$ се нарича множеството от всички точки в равнината с координати $(x, f(x))$ при $x \in D_f$. Това множество се означава с Γ_f, т.е. $\Gamma_f = \{(x, f(x)); \quad x \in D_f\}$.

Всъщност Γ_f е онова множество в равнината, което описва точката $(x, f(x))$, когато x се изменя в дефиниционната област D_f. В повечето случай Γ_f е линия (крива) в равнината (фиг.1). Не всяка крива в равнината обаче може да се изтълкува като графика на някаква функция. Кривата на фигура 2 не е графика на функция, защото на някои стойности на независимата променлива x съответстват повече от една стойност на y, което е недопустимо според дефиниция 1.



Фиг.1



Фиг.2

От дефинициите на D_f, S_f и Γ_f следва следното правило: ако знаем графиката Γ_f на f, то дефиниционната област D_f е проекцията на Γ_f върху оста Ox, а множеството от функционални стойности S_f е проекцията на Γ_f върху оста Oy.

Пример 2. Постройте графиките на следните функции:

1. $f_1(x) = 2x - 5$; **2.** $f_2(x) = |x|$;

3. $f_3(x) = x^2$; **4.** $f_4(x) = \operatorname{sign} x$.

1. Преди всичко дефиниционната област на функцията f_1 е множеството R от всички реални числа, защото действията в даденото правило за функцията са изпълними за всяко реално число x. Според дефиницията на графика на функция Γ_{f_1} се състои от всички точки (x, y) в равнината, за които $y = 2x - 5$, т.е. това е правата с уравнение $y = 2x - 5$. Намираме две точки от тази права:

при $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -5 \quad \Rightarrow \quad (0, -5) \in \Gamma_{f_1}$

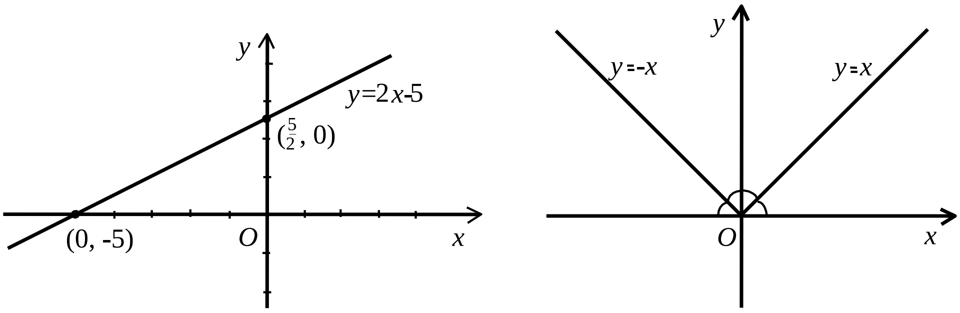
при $y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{5}{2}, 0\right) \in \Gamma_{f_1}$

Тогава правата през точките $(0, -5)$ и $\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$ е графиката на дадената функция (фиг.3).

2. Ако си припомним дефиницията на дадената функция, то

$$f_2(x)=\begin{cases} x, & \text{ако} \quad x>0 \\ 0, & \text{ако} \quad x=0 \\ -x, & \text{ако} \quad x<0 \end{cases}$$

и получаваме, че при $x>0$ графиката Γ_{f_2} е частта от правата с уравнение $y=x$ в първи квадрант; при $x<0$ - частта от правата с уравнение $y=-x$ във втори квадрант и остава да добавим още точката $(0,0)$, защото при $x=0$ имаме $y=f_2(0)=0$ (фиг.3).



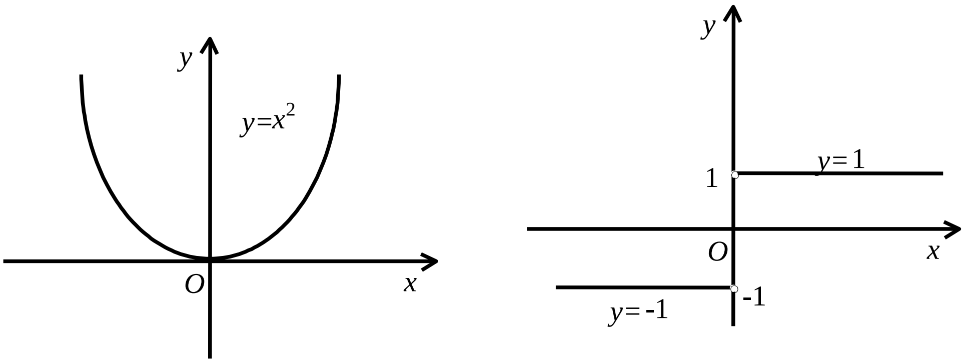
Фиг.3

3. Графиката на функцията $f_3(x)=x^2$ е позната от училищния курс по математика. Това е параболата с уравнение $y=x^2$ (фиг.4).

4. Думата signum на латински означава "знак", т.е. $\operatorname{sign} x$ се чете "знакът на x" и функцията f_4 се дефинира по следния начин:

$$f_4(x)=\operatorname{sign} x=1, \text{ ако } x>0 \text{ и } f_4(x)=\operatorname{sign} x=-1, \text{ ако } x<0.$$

Дефиниционната област на тази функция не включва числото $x=0$. Тогава при $x>0$ графиката е частта от правата с уравнение $y=1$ в първи квадрант, а при $x<0$ - частта от правата с уравнение $y=-1$ в трети квадрант (фиг.4).



Фиг.4

В зависимост от формата, с която се дава правилото (законът) за съответствието между стойностите на зависимата и независимата променлива можем да посочим следните начини за задаване на функцията:

1. *Аналитичен начин* - правилото се дава чрез математическа формула, която точно показва операциите (действията), които трябва да бъдат извършени с всяка стойност на независимата променлива x от дефиниционната област, за да се получи съответната стойност на зависимата променлива y. Това е основния начин на задаване на функциите. Аналитично са зададени всички функции от примери 1 и 2. Да обърнем внимание на това, че след като разполагаме с математическата формула на дадена функция, първо трябва да се определи нейната дефиниционна област. Например за функцията $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$ това означава, че знаменателя $x-3$ трябва да е различен от нула, т.е. $x\neq 3$ и тогава $D_f=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

Пресмятането на стойностите на функцията при дадени стойности на аргумента x извършваме като заместваме във формулата (правилото) x със съответната стойност:

$$f(-7)=\frac{-7+3}{-7-3}=\frac{-4}{-10}=\frac{2}{5},\quad f(2)=\frac{2+3}{2-3}=\frac{5}{-1}=-5 \text{ и } f(0)=\frac{0+3}{0-3}=-1.$$

2. *Табличен начин* - правилото се дава чрез таблица, в която са дадени двойки стойности: стойност на аргумента x и съответната стойност на зависима променлива y. На фиг.5 таблично са зададени функциите на приходите и печалбата от пример 1.

Цена в лева x	**Печалба в лева** $p(x)$	**Приходи в лева** $r(x)$
20	-5000	52000
30	18000	72000
50	52000	100000
70	70000	112000
75	72000	112500
80	73000	112000
82,5	73125	111375
90	72000	108000
100	67000	100000
120	45000	72000
140	7000	28000
145	-5000	14500

Фиг.5

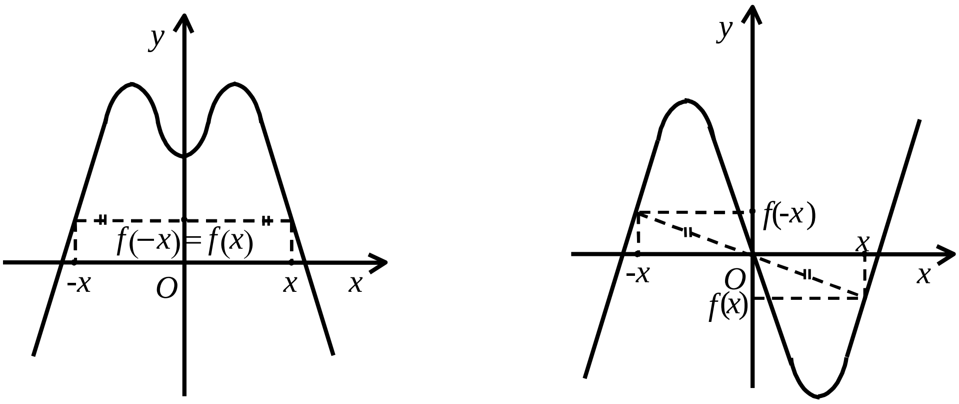
Недостатък на табличното задаване е непълна информация за функцията (дадени са нейните стойности само за някои стойности на аргумента). Предимството е в това, че не се налагат пресмятания, защото стойностите са дадени. От фигура 5 можем да направим извода, че отначало с нарастването на цената нарастват приходите и печалбата, но след това те намаляват. Също така най-големи приходи се реализират при цена 75 лв, а най-голяма печалба при цена 82,5 лв. Също така при цена 20 лв и 145 лв фирмата работи на загуба.

3. *Графичен начин* - правилото се дава чрез графиката на функцията. Независимо от това, че този начин затруднява някои прецизни пресмятания, то както ще видим по-долу той дава достатъчна информация за почти всички важни свойства на функцията. Предстои ни да направим това за най-често срещаните функции. Преди това трябва да припомним някои важни понятия, свързани с понятието функция.

Нека дефиниционната област D_f на функцията $y=f(x)$ е симетрична относно началото O на координатната система, т.е. $x\in D_f \Leftrightarrow -x\in D_f$.

!! ***Дефиниция 2.*** Казва се, че f е четна, ако за всяко $x\in D_f$ е изпълнено равенството $f(-x)=f(x)$. Казва се, че f е нечетна, ако за всяко $x\in D_f$ е изпълнено равенството $f(-x)=-f(x)$.

От тази дефиниция и от елементарни геометрични съображения получаваме, че графиката на една четна функция е симетрична спрямо ординатната ос Oy, а графиката на една нечетна функция е симетрична спрямо координатното начало O (фиг.6).



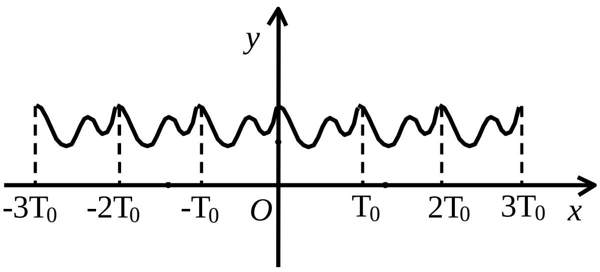
Фиг.6

Да отбележим, че има функции, които не са четни, и не са нечетни. Проверете това за функциите $f(x)=x-2$ и $f(x)=x^3+1$. Също такава е всяка функция, на която дефиниционната област не е симетрична относно начало O на координатната система.

Нека дефиниционната област на функцията $y=f(x)$ е цялата числова ос $(-\infty,+\infty)=R$.
!! ***Дефиниция 3.*** Казва се, че функцията f е периодична, ако съществува число $T\neq 0$ такова, че $f(x+T)=f(x)$ за всяко x. Такова число T се нарича период на функцията f.

Ясно е, че ако T е период на функцията f, то за всяко цяло число k е изпълнено равенството $f(x+kT)=f(x)$, т.е. числата от вида kT са също периоди на f. Най-малкият положителен период T_0 на функцията (ако разбира се такъв съществува) се нарича неин елементарен период.

Нека T_0 елементарния период на функцията f. Тогава от $f(x+kT_0)=f(x)$ за всяко x следва, че графиката на една периодична функция се състои от еднакви и еднакво разположени части в интервалите с дължини, равни на T_0 (фиг.7).



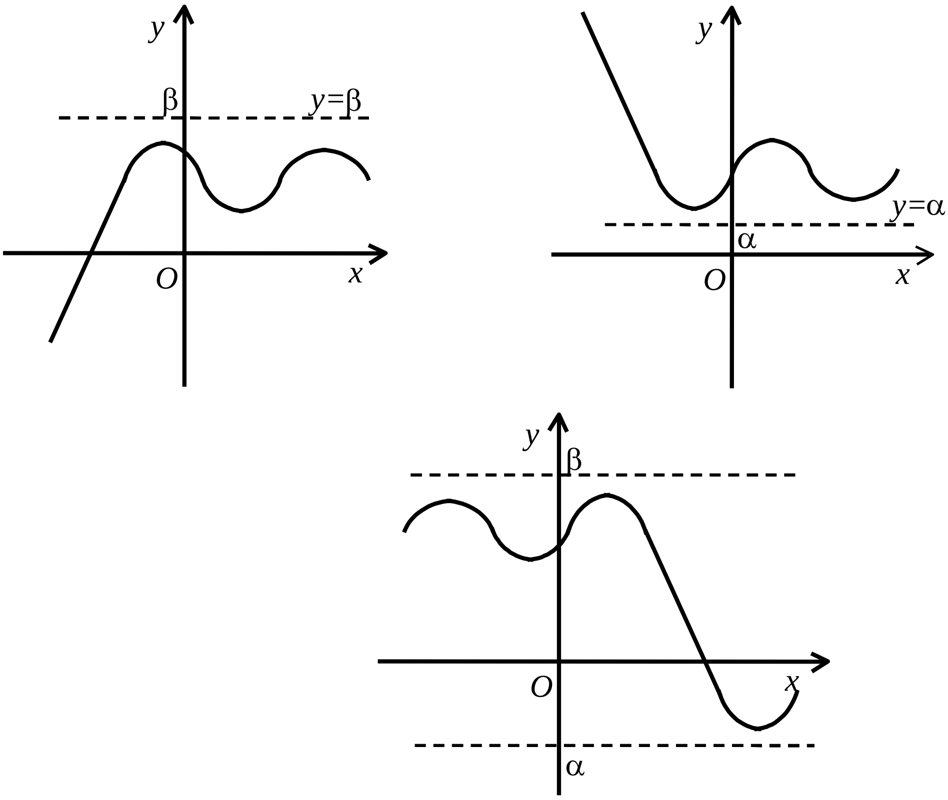
Фиг.7

!! ***Дефиниция 4.*** Казва се, че функцията f е ограничена отгоре в D_f, ако съществува реално число β такова, че за всяко $x\in D_f$ е изпълнено неравенството $f(x)\leq\beta$.

Ако разглеждаме правата с уравнение $y=\beta$ (фиг.8), то условието $f(x)\leq\beta$ за всяко $x\in D_f$ означава, че всяка точка от Γ_f е разположена под тази права. Следователно една функция е ограничена отгоре, ако съществува права успоредна на абсцисната ос Ox такава, че графиката на функцията е разположена изцяло под тази права.

Казва се, че функцията f е ограничена отдолу в D_f, ако съществува реално число α такова, че за всяко $x\in D_f$ е изпълнено неравенството $f(x)\geq\alpha$, т.е. съществува права успоредна на абсцисната ос Ox такава, че Γ_f е разположена изцяло над тази права (фиг.8).

Казва се, че функцията f е ограничена в D_f, ако тя е ограничена и отгоре, и отдолу, т.е. съществуват две прави успоредни на абсцисната ос Ox такива, че Γ_f е разположена изцяло между тях (фиг.8).



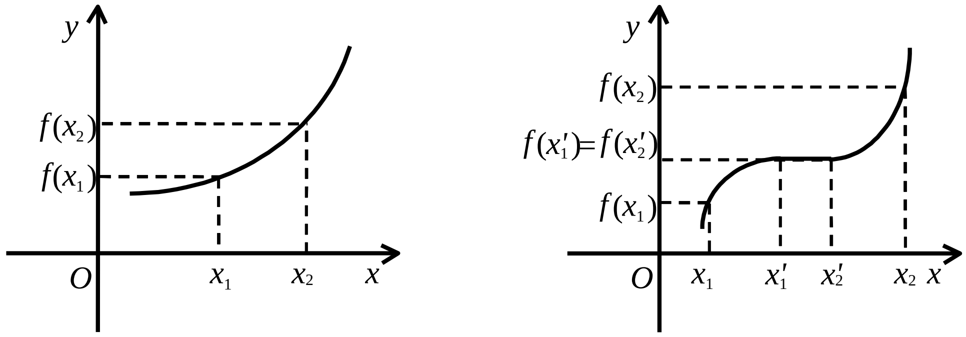
Фиг.8

!! ***Дефиниция 5.*** Казва се, че функцията f е растяща в множеството D_f, ако за всеки две точки $x_1, x_2 \in D$, за които $x_1 < x_2$ е изпълнено неравенството $f(x_1) \le f(x_2)$. Когато за всеки две точки $x_1, x_2 \in D$, за които $x_1 < x_2$ е изпълнено $f(x_1) < f(x_2)$, функцията се нарича строго растяща.

Казва се, че функцията f е намаляваща в множеството D_f, ако за всеки две точки $x_1, x_2 \in D$, за които $x_1 < x_2$ е изпълнено неравенството $f(x_1) \ge f(x_2)$. Когато за всеки две точки $x_1, x_2 \in D$, за които $x_1 < x_2$ е изпълнено $f(x_1) > f(x_2)$, функцията се нарича строго намаляваща.

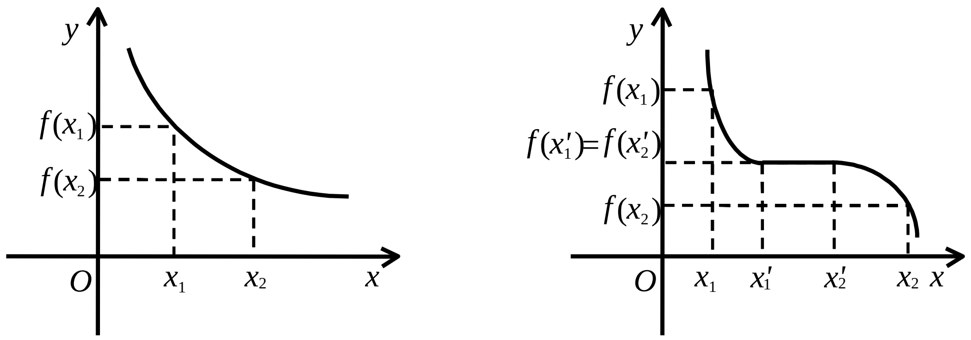
Растящите и намаляващите, строго растящите и строго намаляващите функции се наричат накратко монотонни функции.

Условието за това функцията f да бъде строго растяща означава, че при $x_1 < x_2$ точката $(x_1, f(x_1))$ е по-надолу от точката $(x_2, f(x_2))$, защото $f(x_1) < f(x_2)$. С други думи, ако проследим (пробягаме) графиката на f отляво надясно (т.е. в посока на растене на аргумента x) тя трябва да сочи само нагоре. Ако функцията f е само растяща е изпълнено същото, но се допуска да има и такива участъци от графиката, които са успоредни на оста Ox (фиг.9).



Фиг.9

Изтълкувайте условието за това една функция да бъде намаляваща и условието да бъде строго намаляваща (фиг.10).



Фиг.10

! ! ***Дефиниция 6.*** Нека функциите f и g имат дефиниционни области D_f и D_g. Тогава в общата част $D_{fg} = D_f \cap D_g$ на D_f и D_g се дефинират функциите $f+g$ (сума), $f-g$ (разлика), $f.g$ (произведение), $\frac{f}{g}$ (частно) по следния начин:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ ако } g(x) \neq 0.$$

! ! ***Дефиниция*** *7.* Ако f и g са две дадени функции, композицията $f \circ g$ се дефинира по следния начин:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Дефиниционната област на $f \circ g$ се състои от онези числа x от D_g, за които $g(x) \in D_f$. Това е задължително изискване, защото в противен случай не можем да пресметнем стойностите на f в $g(x)$.

Вместо композиция, функцията $f \circ g$ се нарича още сложна функция. Двете функции g и f се наричат съответно вътрешна функция и външна функция.

Пример 3. Разглеждаме функциите $f(u) = \sqrt{u}$ и $g(x) = x - 1$. Интервалът $[0, +\infty)$ е дефиниционната област D_f на функцията f. Тогава ако разгледаме функцията g в множеството $D_g = [1, +\infty)$, то за всяко $x \in D_f$ е изпълнено $g(x) = x - 1 \geq 0$ и можем да заместим u с $g(x)$. Така получаваме сложната функция:

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x-1} \text{ за } x \in [1, +\infty).$$

! ! Дефиниция 8. Нека е дадена функцията $y = f(x)$ с дефиниционна област D_f и множество от функционални значения S_f. Да предположим, че за всяко $y \in S_f$ има точно едно $x \in D_f$, за което $y = f(x)$. Тогава може да се дефинира една нова функция с дефиниционна област S_f и множество от функционални значения D_f по следния начин: на всяко $y \in S_f$ се съпоставя единственото $x \in D_f$, за което $y = f(x)$, т.е.

$S_f \ni x \longmapsto$ единственото $x \in D_f$, такова, че $y = f(x)$.

Така получената функция се означава с $x = f^{-1}(y)$ и се нарича обратна на функцията $y = f(x)$. В този случай се казва още, че функцията $y = f(x)$ е обратима в D_f.

Ако сега на f^{-1} намерим обратната, по описания по-горе начин, ще получим функцията f. Затова f и f^{-1} се наричат взаимно - обратни функции. Връзката между тях се изразява чрез следната диаграма и равенства:

$$S_{f^{-1}} = D_f \ni x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y \in S_f = D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ за всяко } x \in D_f \qquad \text{и} \qquad f(f^{-1}(y)) = y \text{ за всяко } y \in S_f$$

Известно е, че всяка строго растяща (намаляваща) функция има обратна. На практика ако функцията $y = f(x)$ е зададена аналитично, то нейната обратна търсим като се опитваме да решим уравнението $y = f(x)$ спрямо x (т.е. да изразим x чрез y).

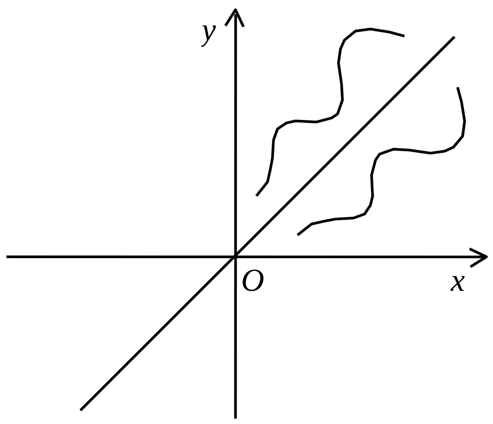
Пример 4. Намерете обратните на следните функции:

1. $y = f(x) = 5x + 3$; **2.** $y = f(x) = x^2$.

1. Уравнението $y = 5x + 3$ има единствено решение $x = \dfrac{y-3}{5}$ и това е обратната функция на дадената.

2. Уравнението $y = x^2$ има две решения относно *x*: $x_1 = \sqrt{y}$ и $x_2 = -\sqrt{y}$. Това означава, че $x = \sqrt{y}$ е обратна на $y = x^2$, когато $x \in [0, +\infty)$, а $x = -\sqrt{y}$ е обратна на $y = x^2$, когато $x \in (-\infty, 0]$.

От дефиницията на обратна функция следва, че функцията $y = f(x)$ и нейната обратна $x = f^{-1}(y)$ имат една и съща графика съответно в координатните системи Oxy и Oyx. Ако преозначим променливите по традиционния начин, т.е. при f^{-1} независимата променлива стане x, а зависимата y, то обратната се записва във вида $y = f^{-1}(x)$. В този случай графиките на f и f^{-1} спрямо една и съща координатна система Oxy ще бъдат различни. Както знаем от училищния курс Γ_f и $\Gamma_{f^{-1}}$ са симетрични спрямо ъглополовящата на първи и трети квадрант (фиг. 11).



Фиг. 11

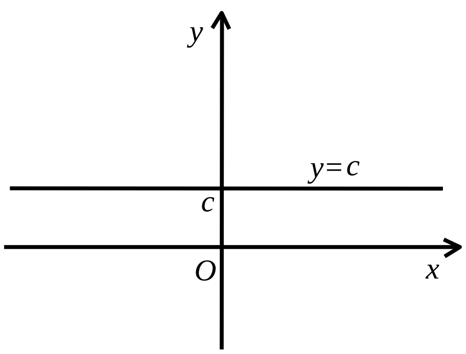
3. Основни елементарни функции. Класификация на елементарните функции

Основните обекти на математическия анализ са функциите въобще. Най-често за да се демонстрират методите му се използват така наречените елементарни функции. Те показват възможните начини за аналитично задаване на връзката между две променливи величини.

Преди всичко ще изучим (чрез техните графики) основните елементарни функции. Нека отбележим, че графиките и свойствата на тези функции са от особена важност.

1) Функцията константа $y = f(x) = c$.

За всяко значение на независимата променлива x зависимата променлива y приема една и съща стойност c. Това означава, че y не зависи (не се влияе) от стойностите на x. Графиката на тази функция е правата с уравнение $y = c$, която е успоредна на абсцисната ос Ox и минава през точката от оста Oy с ордината равна на c (фиг.1).



Фиг.1

2) Степенна функция $y = f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Ще разгледаме някои по-често срещани случаи за n.

2.1) При $\alpha = 1$ *получаваме* $y = x$. Графиката на тази функция е правата с уравнение $y = x$, която е ъглополовящата на първи квадрант и на трети квадрант (фиг.2). Като си припомним дефинициите на основните понятия, свързани с функциите и най-вече техните геометрични интерпретации, можем от графиката да "прочетем" следните свойства на функцията $y = x$:

а) $D_f = (-\infty, +\infty)$, защото при проектирането на графиката върху оста Оx тя се запълва изцяло;

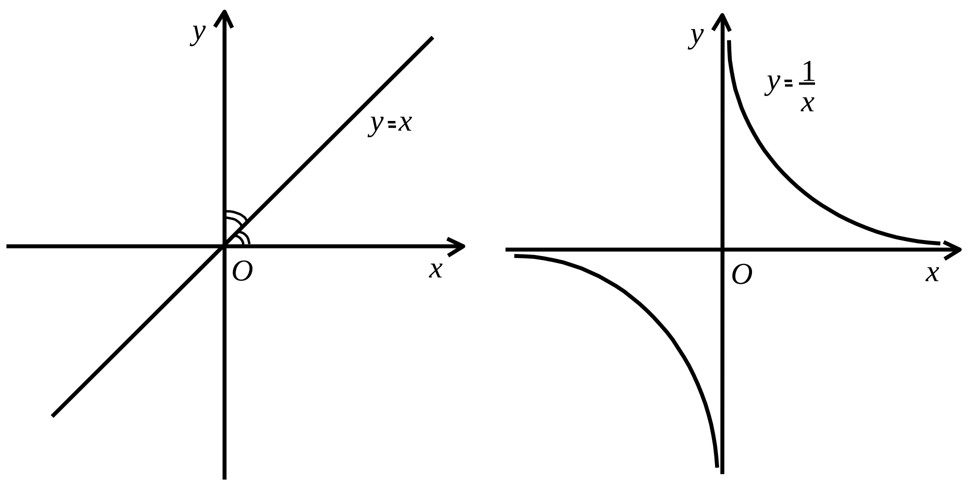
б) функцията е нечетна, защото графиката й е симетрична относно началото O на координатната система;

в) функцията не е периодична, защото няма повтарящ се участък от графиката й;

г) функцията не е ограничена отгоре и не е ограничена отдолу, защото каквато права да вземем, успоредна на оста Ox, има част от графиката, която е над тази права и част от графиката, която е под тази права;

д) функцията е строго растяща, защото графиката й сочи само на горе;

е) $S_f = (-\infty, +\infty)$, защото при проектирането на графиката върху оста Oy тя се запълва изцяло.



Фиг.2

2.2) При $\alpha=-1$ *получаваме* $y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$. Графиката на тази функция се нарича хипербола (фиг.2) и тя има следните свойства:

а) $D_f=(-\infty,\,0)\cup(0,\,+\infty)$, защото при проектирането на Γ_f върху оста Ox не се достига само числото нула;

б) функцията е нечетна, защото графиката й е симетрична относно началото O на координатната система;

в) функцията не е периодична, защото няма повтарящ се участък от графиката й;

г) функцията не е ограничена отгоре и не е ограничена отдолу, защото десният клон на графиката й продължава безкрайно нагоре, а левият клон на графиката й продължава безкрайно надолу;

д) функцията е строго намаляваща в интервала $(-\infty,\,0)$ и в $(0,\,+\infty)$, но в цялата си дефиниционна област не е монотонна;

е) $S_f=(-\infty,\,0)\cup(0,\,+\infty)$, защото при проектирането на Γ_f върху оста Oy не се достига само числото нула.

2.3) При $\alpha=2$ *получаваме* $y=x^2$. Графиката на тази функция се нарича парабола (фиг.3) и има следните свойства:

а) $D_f=(-\infty,\,+\infty)$;

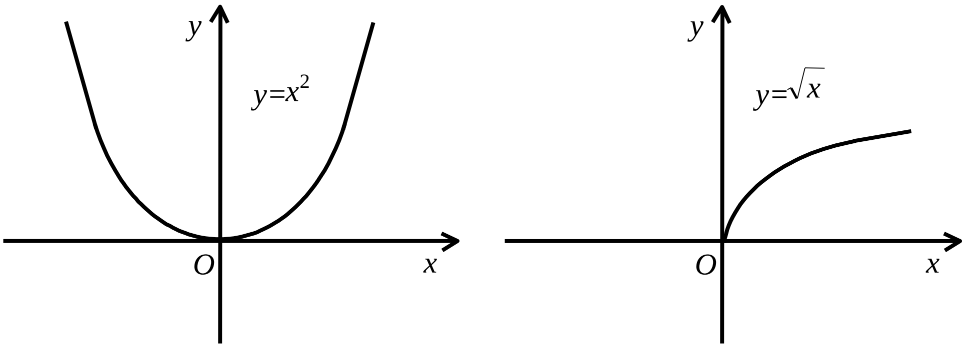
б) функцията е четна, защото графиката й е симетрична относно оста Oy;

в) функцията не е периодична;

г) функцията е ограничена отдолу, защото графиката е разположена изцяло над оста Ox и не е ограничена отгоре;

д) функцията е строго намаляваща в интервала $(-\infty,\,0)$ и строго растяща в интервала $(0,\,+\infty)$, но в цялата дефиниционна област не е монотонна;

е) $S_f=[0,\,+\infty)$, защото при проектирането на Γ_f върху оста Oy получаваме интервала $[0,\,+\infty)$.



Фиг.3

2.4) При $\alpha = \dfrac{1}{2}$ *получаваме* $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ *за* $x \geq 0$. Тази функция е обратна на функцията $y = x^2$, когато последната се разглежда за $x \in [0, +\infty)$, защото $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$ при $x \geq 0$. Графиката на $y = \sqrt{x}$ се получава от десния клон на $y = x^2$ (т.е. при $x \geq 0$) чрез симетрия относно правата с уравнение $y = x$ (фиг. 3).

а) $D_f = [0, +\infty)$;

б) функцията е нито четна, нито нечетна, защото дефиниционната й област не е симетрична относно точката O;

в) функцията не е периодична;

г) функцията е ограничена отдолу и не е ограничена отгоре;

д) функцията е строго растяща в дефиниционната област;

е) $S_f = [0, +\infty)$.

2.5) При $\alpha = 3$ *получаваме* $y = x^3$. Графиката на тази функция се нарича кубична парабола (фиг.4) и има следните свойства:

а) $D_f = (-\infty, +\infty)$;

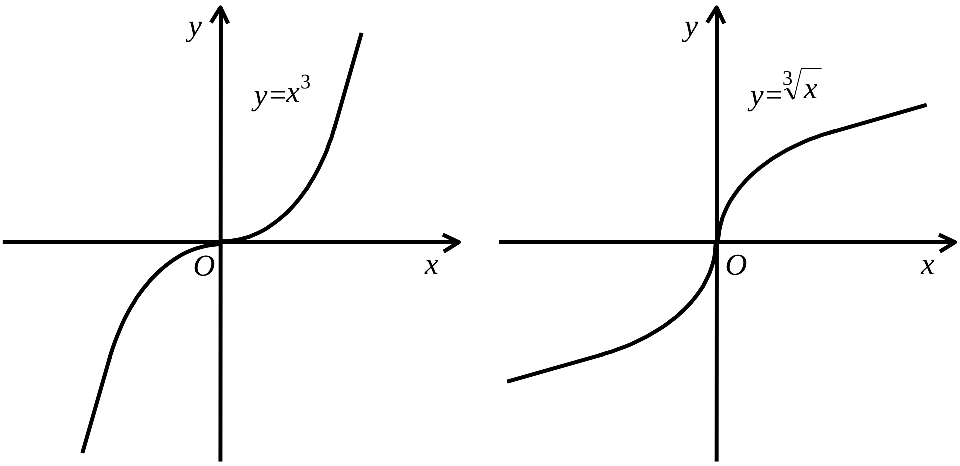
б) функцията е нечетна;

в) функцията не е периодична;

г) функцията не е ограничена отдолу и не е ограничена отгоре;

д) функцията е строго растяща в дефиниционната област;

е) $S_f = (-\infty, +\infty)$.



Фиг.4

2.6) *При* $\alpha = \dfrac{1}{3}$ *получаваме* $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$. Разгледаната по-горе функция $y = x^3$ е строго растяща и тогава тя има обратна функция. Тази функция означаваме с $y = \sqrt[3]{x}$, защото

$y=\sqrt[3]{x} \quad \Leftrightarrow \quad x=y^3$. Графиката на $y=\sqrt[3]{x}$ се получава от тази на $y=x^3$ чрез симетрия относно правата с уравнение $y=x$ (фиг.4). От графиката можем да “прочетем” следните свойства:

а) $D_f=(-\infty, +\infty)$;

б) функцията е нечетна;

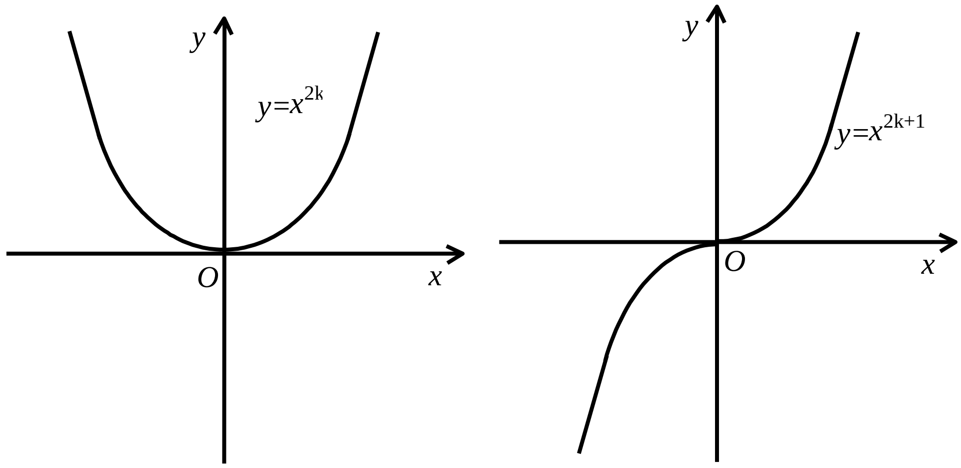
в) функцията не е периодична;

г) функцията не е ограничена и отгоре не е ограничена отдолу;

д) функцията е строго растяща в дефиниционната си област;

е) $S_f=(-\infty, +\infty)$.

Разгледаните функции $y=x^2$ и $y=x^3$ допускат обобщение за произволен показател, който е естествено число. Степенната функция $y=x^n$, $n\in\mathrm{N}$ е дефинирана в интервала $(-\infty, +\infty)$. Когато показателят n е нечетно число, т.е. $n=2k+1$, тази функция е обратима в цялата си дефиниционна област. Когато показателят n е четно число, т.е. $n=2k$, функцията е обратима в интервала $[0, +\infty)$. Видът на графиките на степенните функции $y=x^n$ с четен и нечетен показател е както в 2.3 и 2.5 и е показан на фиг.5.



Фиг.5

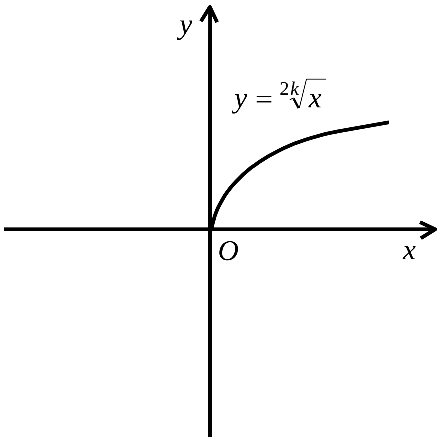
Обратната функция на степенната функция $f(x)=x^n$, $n\in\mathrm{N}$, разглеждана в интервала $[0,+\infty)$ се бележи с $\sqrt[n]{y}$ и се нарича аритметичен корен n-ти. Тази функция съпоставя на всяко $y\in[0, +\infty)$ единствено решение $x\in[0, +\infty)$ на уравнението $y=x^n$. Това решение се означава с $\sqrt[n]{y}$. По такъв начин аритметичният n-ти корен $\sqrt[n]{y}$ е дефиниран за всяко $y\in[0, +\infty)$ и приема неотрицателни стойности, т.е. $\sqrt[n]{y}\geq 0$. Както при всяка двойка взаимно-обратни функции, степенната функция и нейната обратна функция (аритметичният корен) са свързани със следните равенства:

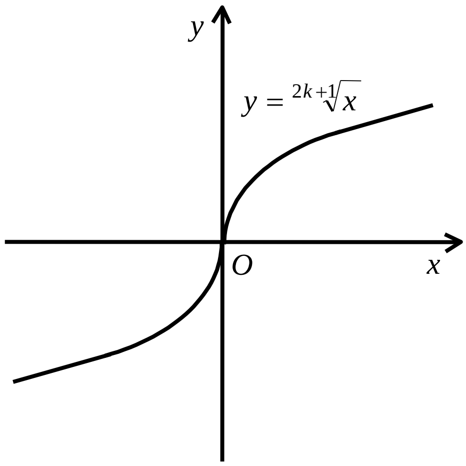
$$\left(\sqrt[n]{y}\right)^n=y \text{ за всяко } y\in[0, +\infty) \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{x^n}=x \text{ за всяко } x\in[0, +\infty)$$

Когато n е четно число, т.е. $n=2k$, уравнението $x^n=y$ има решение тогава и само тогава, когато $y\in[0, +\infty)$. При $y\in(0, +\infty)$ решенията са две $x_1=\sqrt[2k]{y}>0$ и $x_2=-\sqrt[2k]{y}<0$. При $y=0$ решението е $x=0$.

Когато n е нечетно число, т.е. $n=2k+1$, уравнението $x^n=y$ има точно едно решение не само за всяко $y\in[0, +\infty)$, но и за всяко $y\in(-\infty, +\infty)$, Ако $y\in[0, +\infty)$, това е аритметичният корен $x_1=\sqrt[2k+1]{y}$, а когато $y\in(-\infty, 0)$ това е $x_2=-\sqrt[2k+1]{-y}<0$. Това обстоятелство ни дава основание функцията корен n-ти да дефинираме при нечетно $n = 2k+1$ и за $y \in (-\infty, 0)$ по следния начин $\sqrt[2k+1]{y} = -\sqrt[2k+1]{-y} < 0$ за $y \in (-\infty, 0)$.

Графиките на функциите $y = \sqrt[2k]{x}$, $x \in [0, +\infty)$ и $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ са изобразени на фиг.6.





Фиг.6

Техните свойства са както съответно на функциите $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

Да припомним някои свойства на операцията степенуване:

а) $x^0 = 1$ за $x > 0$

б) $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ за $x \neq 0$ и $n \in \mathrm{N}$

в) $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$ за $x > 0$, $p \in \mathrm{Z}$, $q \in \mathrm{N}$

г) $(x.y)^\alpha = x^\alpha . y^\alpha$ за $x > 0$, $y > 0$, $\alpha \in \mathrm{Q}$

д) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$ за $x > 0$, $y > 0$, $\alpha \in \mathrm{Q}$

е) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha.\beta}$ за $x > 0$, $\alpha, \beta \in \mathrm{Q}$

3) Показателна функция $y = f(x) = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$.

В зависимост от това дали $a \in (0, 1)$ или $a > 1$ се получават два класа показателни функции, като тези от един и същи клас имат аналогични свойства. Графиките са показани на фиг.7.

3.1) При $0 < a < 1$ *показателната функция* $y = a^x$ има следните свойства:

а) $D_f = (-\infty, +\infty)$;

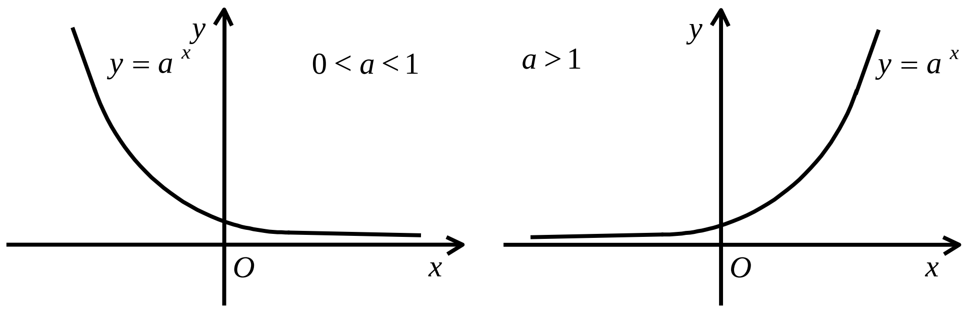
б) функцията е нито четна, нито нечетна, защото при Γ_f няма симетрия както спрямо оста Oy, така и спрямо координатното начало O;

в) функцията не е периодична;

г) функцията е ограничена отдолу и не е ограничена отгоре;

д) функцията е строго намаляваща;

е) $S_f = (0, +\infty)$, т.е. $a^x > 0$ за всяко x.



Фиг.7

3.2) При $a > 1$ *показателната функция* $y = a^x$ има следните свойства:

а) $D_f = (-\infty, +\infty)$;

б) функцията е нито четна, нито нечетна;

в) функцията не е периодична;

г) функцията е ограничена отдолу и не е ограничена отгоре;

д) функцията е строго растяща;

е) $S_f = (0, +\infty)$ т.е. $a^x > 0$ за всяко x.

За $a > 0$, $x, y \in \mathrm{R}$ са в сила следните равенства, свързани с показателната функция:

а) $a^0 = 1$; б) $a^x.a^y = a^{x+y}$;

в) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; г) $\left(a^x\right)^y = a^{x.y}$.

4) Логаритмична функция $y = \log_a x$**,** $a > 0$ **и** $a \neq 1$**.** И в двата случая за a, показателната функция $y = a^x$ е обратима в интервала $(-\infty, +\infty)$. Нейната обратна функция се нарича логаритъм при основа a. Решаването на уравненията $a^x = y$ и $\log_a y = x$ са свързани с познатите ни от училищния курс действия логаритмуване и антилогаритмуване, които се съдържат в свойството:

$$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y$$

По такъв начин връзката между показателната функция и нейната обратна - логаритмичната функция се дава с равенствата:

$a^{\log_a y} = y$ за всяко $y \in (0, +\infty)$ и $\log_a a^x = x$ за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$.

Графиката на логаритмичната функция получаваме от графиката на показателната функция чрез симетрия относно правата с уравнение $y = x$ (фиг.8)

4.1) При $0 < a < 1$ *логаритмичната функция* $y = \log_a x$ *има следните свойства:*

а) $D_f = (0, +\infty)$;

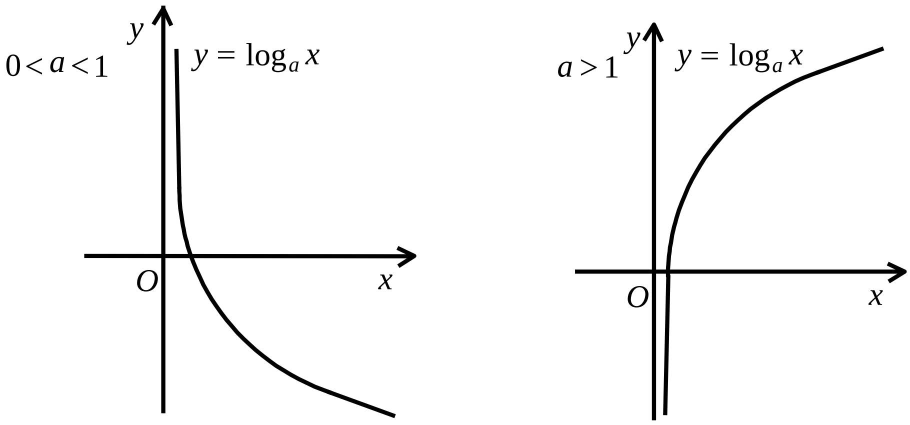
б) функцията е нито четна, нито нечетна;

в) функцията не е периодична;

г) функцията не е ограничена отдолу и не е ограничена отгоре;

д) функцията е строго намаляваща;

е) $S_f = (-\infty, +\infty)$.



Фиг.8

4.2) При $a>1$ *логаритмичната функция има следните свойства:*

а) $D_f=(0,+\infty)$;

б) функцията е нито четна, нито нечетна;

в) функцията не е периодична;

г) функцията не е ограничена отдолу и не е ограничена отгоре;

д) функцията е строго растяща;

е) $S_f=(-\infty,+\infty)$.

За $a>0$, $a\neq 1$ и $x>0$, $y>0$ са в сила следните равенства, свързани с логаритмичната функция:

а) $\log_a a=1$; б) $\log_a 1=0$;

в) $\log_a(x.y)=\log_a x+\log_a y$; г) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;

д) $\log_a x^{\alpha}=\alpha.\log_a x$; е) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$; $b>0$ и $b\neq 1$.

Връщайки се към точка 2 (степенна функция) ние можем да дефинираме степенната функция $y=f(x)=x^{\alpha}$ вече за произволен реален показател α. За всяко $x\in(0,+\infty)$ това става със следното дефиниционно равенство:

$$x^{\alpha}\overset{\text{деф.}}{=}a^{\alpha\log_a x},$$

където $a>0$ и $a\neq 1$ е произволна основа. Свойствата на тази функция (при различните случаи за a и α) можем да изведем от свойствата на функциите $u=\log_a x$, $v=\alpha.u$ и $y=a^{v}$, тъй като $y=x^{\alpha}$ е композиция на тези три функции. Свойствата на степенната функция с рационален показател, изброени в края на точка 3, остават в сила и при произволен реален показател.

5) Тригонометрични функции.

Тригонометричните функции синус, косинус, тангенс и котангенс и някои техни свойства са известни до голяма степен от училищния курс по математика. Тук независимата променлива x се тълкува като ъгъл измерен в радиани, а зависимата променлива y представлява съответно неговия синус, косинус, тангенс или котангенс.

5.1) Тригонометричната функция $y=f(x)=\sin x$.

Графиката на тази функция е представена на фигура 9 и се нарича синусоида. От нея лесно можем да извлечем следните свойства:

а) $D_f=(-\infty,+\infty)$;

б) функцията е нечетна, което аналитично означава $\sin(-x)=-\sin x$;

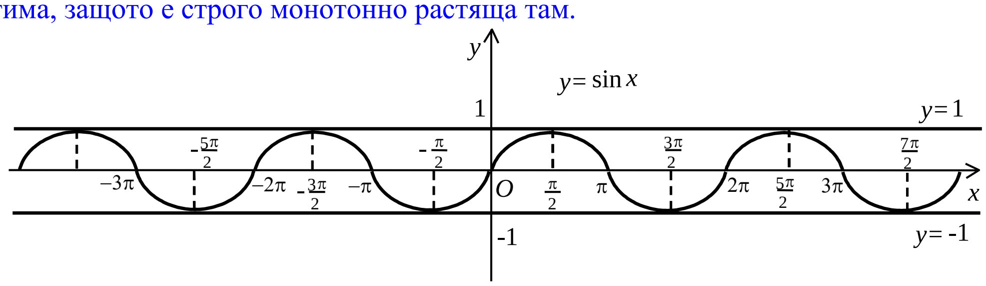
в) функцията е периодична с елементарен период $T = 2\pi$, т.е. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ за $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

г) функцията е ограничена и $-1 \le \sin x \le 1$, т.е. $|\sin x| \le 1$;

д) функцията не е монотонна в цялата си дефиниционна област, но има безбройно много интервали, в които тя е строго растяща и безбройно много интервали, в които тя е строго намаляваща;

е) $S_f = [-1, 1]$.

От тригонометрията е известно, че уравнението $\sin x = y$ има решение, ако $y \in [-1, 1]$. Тъй като функцията е периодична, то тези решения са безбройно много, т.е. за всяко $y \in [-1, 1]$ има безбройно много стойности x, за които $\sin x = y$. Поради тези причини функцията синус не е обратима в $(-\infty, +\infty)$. Ако разгледаме обаче тази функция в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то тя е обратима, защото е строго монотонно растяща там.



Фиг.9

5.2) Тригонометричната функция $y = f(x) = \cos x$.

Графиката е показана на фигура 10 и се нарича косинусоида. Свойствата на функцията са следните:

а) $D_f = (-\infty, +\infty)$;

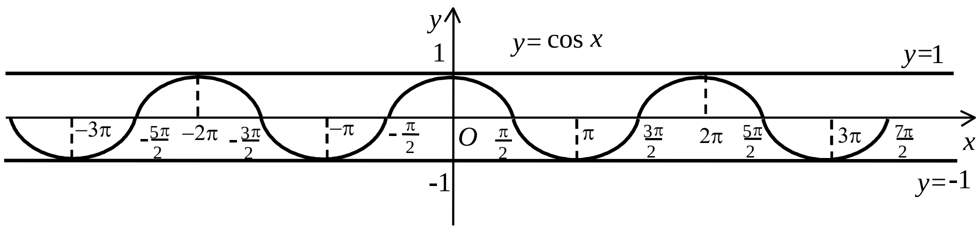
б) функцията е четна, т.е. $\cos(-x) = \cos x$;

в) функцията е периодична с елементарен период $T = 2\pi$, т.е. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ за $k = \pm 1, \pm 2, \dots$;

г) функцията е ограничена и $-1 \le \cos x \le 1$, т.е. $|\cos x| \le 1$;

д) функцията не е монотонна в цялата си дефиниционна област, но има безбройно много интервали, в които тя е строго растяща и безбройно много интервали, в които тя е строго намаляваща;

е) $S_f = [-1, 1]$.



Фиг.10

Функцията косинус не е обратима в $(-\infty, +\infty)$. Тя обаче е обратима, ако я разгледаме в интервала $[0, \pi]$, защото е строго намаляваща в този интервал.

5.3) Тригонометричната функция $y = f(x) = \operatorname{tg} x$.

Тъй като $\operatorname{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то функцията е дефинирана за всяко x, за което $\cos x \neq 0$, т.е. за $x \neq (2k+1).\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathrm{Z}$. Функцията тангенс, чиято графика е на фиг.11, има следните свойства:

а) $D_f = \left\{ x \in \mathrm{R} \ : \ x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathrm{Z} \right\}$;

б) функцията е нечетна, т.е. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ за $x \in D_f$;

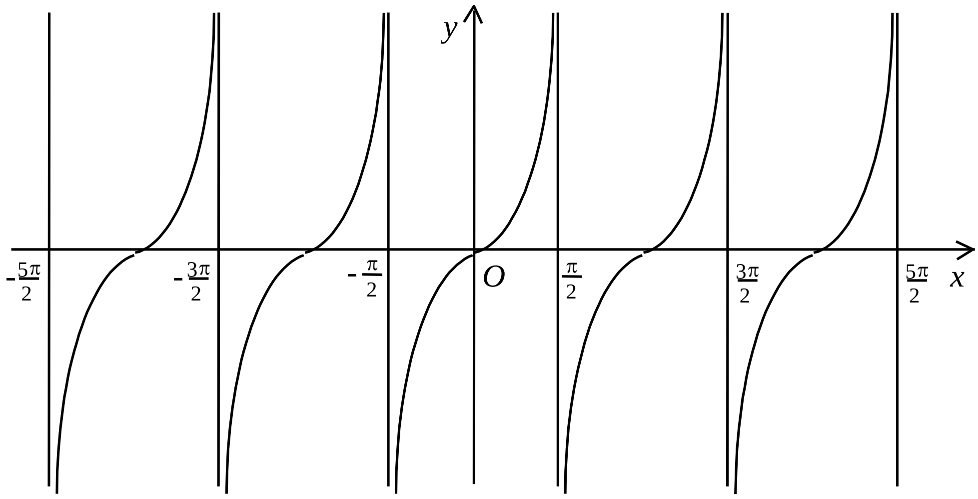
в) функцията е периодична с елементарен период π, т.е. $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg}x$ за $x \in D_f$ и $k \in \mathrm{Z}$;

г) функцията не е ограничена отдолу и не е ограничена отгоре;

д) функцията не е монотонна в D_f, но във всеки един от интервалите, от които се състои дефиниционната й област тя е строго растяща;

е) $S_f = (-\infty, +\infty)$.

Функцията тангенс не е обратима в D_f, но например в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ тя е обратима, защото е строго растяща.



Фиг.11

5.4) Тригонометричната функция $y = f(x) = \operatorname{cotg} x$.

Тъй като $\operatorname{cotg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, то функцията е дефинирана за всяко x, за което $\sin x \neq 0$, т.е. за $x \neq k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$. Функцията котангенс, чиято графика е дадена на фигура 12 има следните свойства:

а) $D_f = \{x \in \mathrm{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathrm{Z}\}$;

б) функцията е нечетна, т.е. $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg}(x)$ за $x \in D_f$;

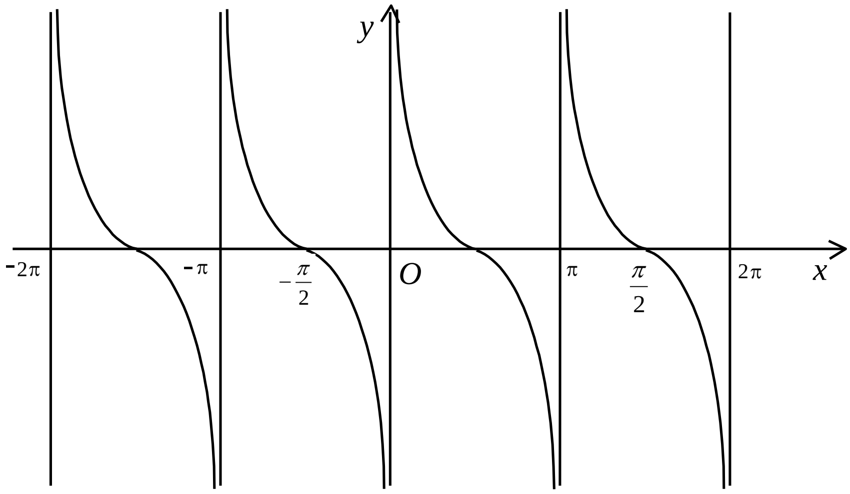
в) функцията е периодична с елементарен период π, т.е. $\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg}x$ за $x \in D_f$ и $k \in \mathrm{Z}$;

г) функцията не е ограничена отдолу и не е ограничена отгоре;

д) функцията не е монотонна в D_f, но във всеки един от интервалите, от които се състои дефиниционната й област тя е строго намаляваща;

е) $S_f = (-\infty, +\infty)$.

Функцията котангенс не е обратима в D_f, но например в интервала $(0, \pi)$ тя е обратима, защото е строго намаляваща.



Фиг.12

6) Обратни тригонометрични функции.

Видяхме, че всяка една тригонометрична функция е обратима в подходящ интервал. Така получените четири обратни функции се наричат съответно аркуссинус, аркускосинус, аркустангенс и аркускотангенс.

6.1) Обратната тригонометрична функция $y = f(x) = \arcsin x$.

Тази функция е обратна на функцията $y = \sin x$ за $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Графиката й се получава от съответната част на графиката на синуса чрез симетрия спрямо правата с уравнение $y = x$. (фиг.13). Функцията аркуссинус притежава следните свойства:

а) $D_f = [-1, 1]$;

б) функцията е нечетна, т.е. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

в) функцията не е периодична;

г) функцията е ограничена и $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$ за $x \in [-1, 1]$;

д) функцията е строго растяща;

е) $S_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Тъй като синусът и аркуссинусът са взаимно-обратни функции, то в сила са следните равенства:

$\arcsin(\sin x) = x$ за всяко $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin(\arcsin y) = y$ за всяко $y \in [-1, 1]$.

6.2) Обратната тригонометрична функция $y = f(x) = \arccos x$.

Тази функция е обратна на функцията $y = \cos x$ за $x \in [0, \pi]$, а графиката й е показана на фигура 13. Функцията аркускосинус притежава следните свойства:

а) $D_f = [-1, 1]$;

б) функцията е нито четна, нито нечетна;

в) функцията не е периодична;

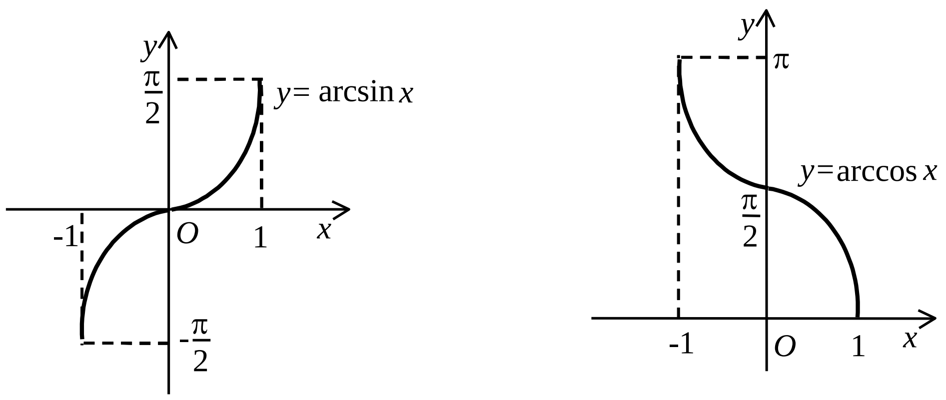
г) функцията е ограничена и $0 \le \arccos x \le \pi$ за $x \in [-1, 1]$;

д) функцията е строго намаляваща;

е) $S_f = [0, \pi]$.

За взаимно-обратните функции косинус и аркускосинус са в сила следните равенства:

$\arccos(\cos x) = x$ за всяко $x \in [0, \pi]$ и $\cos(\arccos y) = y$ за всяко $y \in [-1, 1]$.



Фиг.13

6.3) Обратната тригонометрична функция $y = f(x) = \text{arctg}x$.

Тази функция е обратна на $y = \text{tg}x$ за $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, а графиката ѝ е показана на фигура 14. Функцията аркустангенс има следните свойства:

а) $D_f = (-\infty, +\infty)$;

б) функцията е нечетна, т.е. $\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}(x)$;

в) функцията не е периодична;

г) функцията е ограничена и $-\dfrac{\pi}{2} < \text{arctg}x < \dfrac{\pi}{2}$ за $x \in (-\infty, +\infty)$;

д) функцията е строго растяща;

е) $S_f = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Взаимно-обратните функции тангенс и аркустангенс са свързани чрез следните равенства:

$\text{arctg}(\text{tg}x) = x$ за всяко $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\text{tg}(\text{arctg}y) = y$ за всяко $y \in (-\infty, +\infty)$.

6.4) Обратната тригонометрична функция $y = f(x) = \text{arccotg}x$

Тази функция е обратна на $y = \text{cotg}x$ за $x \in (0, \pi)$ с графика, която е показана на фигура 14. Функцията аркускотангенс има следните свойства:

а) $D_f = (-\infty, +\infty)$;

б) функцията е нито четна, нито нечетна;

в) функцията не е периодична;

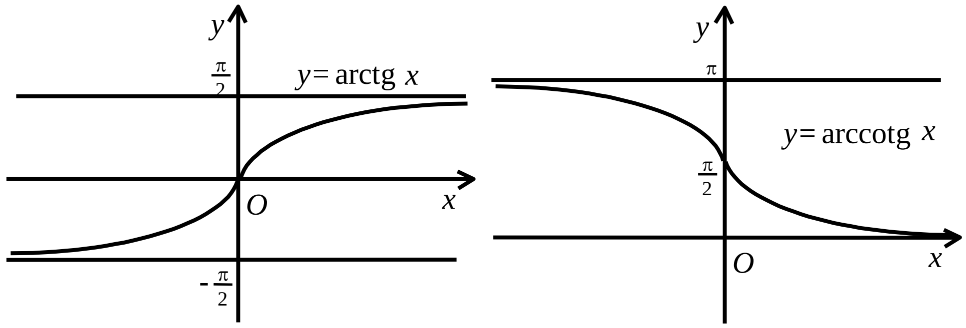
г) функцията е ограничена и $0 < \text{arccotg}x < \pi$ за $x \in (-\infty, +\infty)$;

д) функцията е строго намаляваща;

е) $S_f = (0, \pi)$.

За взаимно-обратните функции котангенс и аркускотангенс са в сила следните равенства:

$\text{arccotg}(\text{cotg}x) = x$ за всяко $x \in (0, \pi)$ и $\text{cotg}(\text{arccotg}y) = y$ за всяко $y \in (-\infty, +\infty)$.



Фиг.14

Да припомним стойностите на тригонометричните функции за някои значения на аргумента, както и по-важните тригонометрични формули:

1. $\sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$; $\mathrm{tg}0 = 0$.
2. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathrm{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\mathrm{cotg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.
3. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\mathrm{tg} \frac{\pi}{4} = 1$; $\mathrm{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$.
4. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\mathrm{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; $\mathrm{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
5. $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\mathrm{cotg} \frac{\pi}{2} = 0$.
6. $\sin \pi = 0$; $\cos \pi = -1$; $\mathrm{tg}\pi = 0$.
7. $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$; $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$; $\mathrm{cotg} \frac{3\pi}{2} = 0$.
8. $\sin 2\pi = 0$; $\cos 2\pi = 1$; $\mathrm{tg}2\pi = 0$.
9. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
10. $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$.
11. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
12. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
13. $\sin(x \pm y) = \sin x.\cos y \pm \sin y.\cos x$.
14. $\cos(x \pm y) = \cos x.\cos y \mp \sin x.\sin y$

! ! ***Дефиниция 1.*** Разгледаните до тук функции, а именно:

1. Функцията константа $y = c$.
2. Степенната функция $y = x^{\alpha}$.
3. Показателната функция $y = a^x$.
4. Логаритмичната функция $y = \log_a x$.
5. Тригонометричните функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}x$ и $y = \mathrm{cotg}x$.
6. Обратните тригонометричните функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}x$ и $y = \mathrm{arccotg}x$.

се наричат основни елементарни функции.

! ! ***Дефиниция 2.*** Всяка функция, която може да бъде зададена чрез формула, съдържаща аритметичните операции (събиране, изваждане, умножение и деление) и композиции, приложени краен брой пъти върху основните елементарни функции, се нарича елементарна функция.

Известна е следната класификация на елементарните функции:

1. Полиноми. Към полиномите се отнасят функциите, които се задават по следния начин:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

където $n \in \mathrm{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са реални числа и се наричат коефициенти. Ако $a_0 \neq 0$, то числото n се нарича степен на полинома и a_0 се нарича старши коефициент. Полиномите от първа степен се наричат още линейни функции и имат вида $y = f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Полиномите от втора степен се наричат още квадратни функции и имат вида $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

2. Рационални функции. Това са функциите, които могат да бъдат представени във вида:

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

където $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми.

Да отбележим, че класът на полиномите се съдържа в класа на рационалните функции.

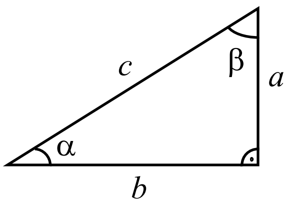
3. Ирационални функции. Към ирационалните функции се отнасят функциите, които могат да бъдат зададени чрез формула, съдържаща композиции на краен брой рационални функции, степенни функции с рационални показатели и аритметичните операции (събиране, изваждане, умножение и деление). Такава е например функцията:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + 4\sqrt{x}}}$$

Рационалните и ирационалните функции се наричат още алгебрични функции.

4. Трансцендентни функции. Това са всички елементарни функции, които не са алгебрични функции. Може да се докаже, че всички тригонометрични функции, обратни тригонометрични функции, показателната функция и логаритмичната функция са трансцендентни функции.

Пример 1. Даден е правоъгълен триъгълник с ъгли α, β и $90°$ и дължини на срещулежащите страни съответно a, b и c (фиг.15). От училищният курс са известни следните формули:



Фиг.15

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{cotg}\,\beta = \frac{a}{b}$$

Пресметнете:

а) $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta$, ако $a=4$ см и $c=8$ см.

б) дължините на страните и мерките на ъглите, ако $\alpha=60^\circ$ и $b=3\sqrt{3}$ см.

в) мерките на ъглите α и β, ако $a=5$ см и $c=10$ см.

Решение: а) $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$. От теоремата на Питагор получаваме:

$a^2+b^2=c^2 \;\Rightarrow\; 16+b^2=64 \;\Rightarrow\; b^2=48$, т.е $b=4\sqrt{3}$ см; $\quad \mathrm{tg}\beta=\dfrac{b}{a}=\dfrac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$.

б) $\cos\alpha=\dfrac{b}{c} \;\Rightarrow\; \cos 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{c} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{c} \;\Rightarrow\; c=6\sqrt{3}$ см.

$a^2+b^2=c^2 \;\Rightarrow\; a^2+(3\sqrt{3})^2=(6\sqrt{3})^2 \;\Rightarrow\; a^2=36.3-9.3=27.3 \;\Rightarrow\; a=9$ см.

$\beta=90^\circ-60^\circ=30^\circ$ или $\beta=\dfrac{\pi}{6}$.

в) Тъй като $\sin\alpha=\dfrac{a}{c} \;\Rightarrow\; \sin\alpha=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \alpha=\dfrac{\pi}{6}$. Тогава намираме $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$.

Пример 2. Намерете дефиниционните области на следните функции:

1. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$; **2.** $f(x)=2-\log_3(x+5)$;

3. $f(x)=\sqrt[6]{1-7x}$; **4.** $f(x)=\arcsin(2x+1)$

Решение: **1.** Всички операции, които трябва да бъдат извършени в числителя и знаменателя с независимата променлива x са извършими за всяко x. Но делението е невъзможно, когато знаменателят е равен на нула. Затова, дефиниционната област се определя от условието $x^2-5x+6\neq 0$. Първо трябва да решим квадратното уравнение $x^2-5x+6=0$. Тъй като $a=1$, $b=-5$ и $c=6$, то за дискриминантата на уравнението намираме $\mathrm{D}=(-5)^2-4.1.6=25-24=1>0$. Тогава корените x_1 и x_2 пресмятаме по познатата ни формула $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$ и получаваме $x_1=\dfrac{5-1}{2}=2$ и $x_2=\dfrac{5+1}{2}=3$. Следователно дефиниционната област D се определя от условието D : $x\neq 2$ и $x\neq 3$ или $D=(-\infty,\,2)\cup(2,\,3)\cup(3,\,+\infty)$.

2. Операцията логаритмуване е изпълнима само за строго положителни величини и получаваме D: $x+5>0$, т.е. $x>-5$ или $D=(-5,\,+\infty)$.

3. Тъй като операцията кореняване при четен коренен показател е допустима само за неотрицателни числа, то D: $1-7x\geq 0$, т.е. $x\leq\dfrac{1}{7}$ или $D=\left(-\infty,\,\dfrac{1}{7}\right]$.

4. Функцията аркуссинус е дефинирана в интервала $[-1,\,1]$. Следователно дефиниционната област се определя от неравенствата $-1\leq 2x+1\leq 1$. Получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l}2x+1\leq 1\\ 2x+1\geq -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}2x\leq 0\\ 2x\geq -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x\leq 0\\ x\geq -1\end{array}\right.$$

и тогава $D=[-1,\,0]$.

! ✍ *Задачи за самостоятелна работа*

1. Намерете дефиниционните области на следните функции:

а) $f(x)=\dfrac{6x-13}{2x^2-3x-2}$; б) $f(x)=\dfrac{3x-1}{\ln(2x+7)}$;

в) $f(x)=\sqrt[4]{5-4x}$; г) $f(x)=\arccos(3x-8)$;

д) $f(x)=\sqrt{2x-1}+5\log_2(4-3x)$; е) $f(x)=\dfrac{6\sin x+2\cos(3x+1)}{x^3-4x^2+3x}$.

4. Граница на функция. Някои основни граници. Непрекъснати функции

Идеята за граница е основополагаща в математическия анализ. Всички по-важни понятия като непрекъснатост, производна, интеграл се дефинират чрез граница. Границата на една функция $y=f(x)$ характеризира поведението й, когато аргументът x се приближава към предварително избрана стойност x_0.

Пример 1. Да се изследва поведението на функцията $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$, когато аргументът x се приближава към числото 1:

а) със стойности по-малки от 1;

б) със стойности по-големи от 1;

в) по произволен начин.

Представа за изследваното поведение на функцията можем да добием като даваме стойности на аргумента x, които стават все по-близки до числото 1. Резултатите от пресмятанията са дадени в таблицата на фиг.1 и те показват, че както и да се приближава аргументът x към числото 1, винаги стойностите на функцията се приближават към числото 0. С други думи когато x е близко до числото 1 (т.е. разстоянието между x и 1 става малко), то стойността $f(x)$ е близко до числото 0 (т.е. разстоянието между $f(x)$ и 0 става малко). В този случай на математически език се казва, че границата на функцията f, когато x клони към 1, е равна на нула.

x	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	$\to 1$
$f(x)$	-0,5	- 0,2	- 0,154	-0,111	-0,071	-0,034	-0,003	-0,0003	$\to 0$
x	2	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,01	1,001	$\to 1$
$f(x)$	0,25	0,143	0,117	0,091	0,063	0,032	0,003	0,0003	$\to 0$
x	0	1,5	0,6	1,3	0,8	1,1	0,99	1,001	$\to 1$
$f(x)$	-0,5	0,143	- 0,154	0,091	-0,071	0,032	-0,003	0,0003	$\to 0$

Фиг.1

Да обобщим направените изводи от този пример. Нека функцията f е дефинирана в крайния интервал Δ и $x_0\in\Delta$ или x_0 е край на интервала.

! ! ***Дефиниция 1.*** Казва се, че числото ℓ е граница на функцията f, когато x клони към x_0, ако на всяко положително число ε може да се съпостави положително число δ (зависещо от ε) по такъв начин, че щом x принадлежи на Δ, $x \neq x_0$ и удовлетворява неравенството $|x - x_0| < \delta$, да е изпълнено неравенството $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Нека разтълкуваме условието за граница от тази дефиниция. Както знаем модулът на разликата на две реални числа представлява разстоянието между тези числа, разглеждани като точки от числовата ос. Тогава $|x - x_0| < \delta$ означава, че разстоянието между x и x_0 е по-малко от δ. Аналогично неравенството $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ означава, че разстоянието между $f(x)$ и ℓ е по-малко от ε. Ако числата ε и δ стават малки (близки до нулата), то разстоянието между x и x_0 ще става малко (т.е. x ще се приближава до x_0) и разстоянието между $f(x)$ и ℓ ще става малко (т.е. $f(x)$ ще се приближава до ℓ). Следователно условието за граница можем да изкажем по следния начин: $f(x)$ се приближава до ℓ, когато x се приближава до x_0. Този факт записваме по следния начин:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$$

и четем: лимес $f(x)$, когато x клони към x_0 е равно на ℓ или $f(x)$ клони към ℓ, когато x клони към x_0.

Понятието граница на функция, както техниките за извършване на граничния преход (пресмятането на граници) са до голяма степен известни от училищния курс. Затова ще припомним, без доказателство, правилата за намиране на граници.

!! ***Теорема 1.*** Нека функциите f и g са дефинирани в крайния интервал Δ, $x_0 \in \Delta$ или x_0 е край на Δ. Ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = p$, то е изпълнено следното:

1. Границата на x при $x \to x_0$ е равна на x_0, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.
2. Границата на константа е самата константа, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, c - константа.
3. Границата на сума е сумата от границите, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + p$.
4. Границата на разлика е разликата от границите, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \ell - p$.
5. Границата на произведение е произведението от границите, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \ell.p$.
6. Границата на частно е частното от границите, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\ell}{p}$, ако $p \neq 0$ и $g(x) \neq 0$.
7. Границата на корен е корен от границата, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$, ако $\sqrt[n]{\ell}$ съществува.

Следствие 1. Ако $P(x)$ и $Q(x)$ са произволни полиноми и $x_0 \in \mathrm{R}$, то

1. $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, ако $Q(x_0) \neq 0$.

Следващата теорема показва как се извършва граничния преход в неравенства.

!! ***Теорема 2.*** Нека функциите f, g и h са дефинирани в крайния интервал Δ и $x_0 \in \Delta$ или е край на Δ. Тогава:

1. Ако $f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in \Delta$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = p$, то $\ell \leq p$.

2. Ако $f(x) \le g(x) \le h(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell$, то $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Пример 2. Пресметнете границите:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)$; **2.** $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)(4-x)$; **3.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{x-7}$;

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-x+1}$; **5.** $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{4-3x+x^2}$; **6.** $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[3]{2x^3+x^2-4x+9}$.

Решение: Прилагаме правилата за намиране на граници от теорема 1 и следствие 1.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5) = 2^2-3.2+5 = 4-6+5 = 3$.

2. $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)(4-x) = (-2+3).(4+1) = 1.5 = 5$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{x-7} = \dfrac{3+5}{3-7} = -\dfrac{8}{4} = -2$.

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-x+1} = \dfrac{(-2)^2-3.(-2)+2}{3.(-2)^2-(-2)+1} = \dfrac{4+6+2}{12+2+1} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{4-3x+x^2} = \sqrt{4-3+1} = \sqrt{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[3]{2x^3+x^2-4x+9} = \sqrt[3]{2(-3)^3+(-3)^2-4.(-3)+9} =$

$= \sqrt[3]{2.(-27)+9+12+9} = \sqrt[3]{-54+30} = \sqrt[3]{-24} = \sqrt[3]{(-8).3} =$

$= -2.\sqrt[3]{3}$.

Пример 3. Пресметнете границите:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$; **2.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;

4. $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t^2+2t+1}{t^2-1}$; **5.** $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2+3t-10}{2-t}$; **6.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$;

7. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sqrt{4+t}-\sqrt{4-t}}$; **8.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$.

Решение: При всички граници числителят и знаменателят клонят едновременно към нула. В такъв случай се казва, че е налице неопределеност от вида нула върху нула и се използва символът $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. От ситуацията излизаме като чрез преобразуване на числителя и знаменателя се стремим да отделим множители, които клонят към нула.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{-4}{-2} = 2$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)x+3)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{1}{6}$, защото корените на квадратното уравнение $x^2-5x+6=0$ са $x_1=3$ и $x_2=2$ и тогава, както знаем от училищния курс по математика, квадратният тричлен x^2-5x+6 се разлага по следния начин $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$.

4. $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t^2+2t+1}{t^2-1}=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{(t+1)^2}{(t-1)(t+1)}=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t+1}{t-1}=\dfrac{0}{-2}=0$.

5. $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2+3t-10}{2-t}=\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{(t-2)(t+5)}{2-t}=\lim\limits_{t\to 2}(-t-5)=-7$.

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=4$.

7. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sqrt{4+t}-\sqrt{4-t}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t(\sqrt{4+t}+\sqrt{4-t})}{(\sqrt{4+t}-\sqrt{4-t})(\sqrt{4+t}+\sqrt{4-t})}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t(\sqrt{4+t}+\sqrt{4-t})}{(4+t)-(4-t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t(\sqrt{4+t}+\sqrt{4-t})}{2t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{4+t}+\sqrt{4-t}}{2}==\dfrac{\sqrt{4}+\sqrt{4}}{2}=2$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}==\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}=\dfrac{1}{8}$.

В пример 1 разгледахме два специални начина на приближаване на аргумента x към числото 1 - със стойности по-малки и със стойности по-големи от 1. В тези случаи възникват понятията лява и дясна граница.

Нека функцията f е дефинирана в интервала Δ и x_0 е вътрешна точка на Δ, т.е. $x_0\in\Delta$ и не е край на Δ.

! ! ***Дефиниция 2.*** Казва се, че числото ℓ_1 е лява граница на функцията f, когато x клони към x_0, ако $f(x)$ се приближава до ℓ_1, когато x се приближава до x_0 отляво (т.е. със стойности по-малки от x_0). Този факт записваме така:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=\ell_1 \qquad \text{или} \qquad f(x)\xrightarrow[x<x_0]{x\to x_0}\ell_1$$

! ! ***Дефиниция 3.*** Казва се, че числото ℓ_2 е дясна граница на функцията f, когато x клони към x_0, ако $f(x)$ се приближава до ℓ_1, когато x се приближава до x_0 отдясно (т.е. със стойности по-големи от x_0). Този факт записваме така:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=\ell_2 \qquad \text{или} \qquad f(x)\xrightarrow[x>x_0]{x\to x_0}\ell_2$$

Лявата и дясната граници на f се наричат още едностранни граници на функцията f в точката x_0.

Следващото твърдение показва в какво отношение се намират едностранните граници и границата на функцията f в точката x_0.

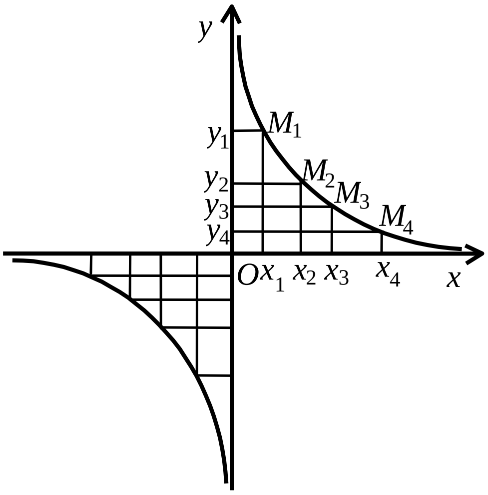
! ! ***Теорема 3.*** Функцията f има за граница числото ℓ, когато x клони към x_0, тогава и само тогава, когато f има лява граница и дясна граница в точката x_0 и тези две едностранни граници са равни на ℓ, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=\ell .$$

Изложената до тук концепция за граница може да бъде доразвита в случаите, когато аргументът x става произволно голям (приближава се до $+\infty$), когато става произволно малък (приближава се до $-\infty$) или когато границата има това свойство.

Пример 4. Да се изследва поведението на функцията $f(x)=\dfrac{1}{x}$, когато x се приближава към $+\infty$ и когато се приближава към $-\infty$.

Използваме познатата ни графика на функцията $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Нека оставим x да се приближава към $+\infty$. Това става чрез стойности, които се отдалечават от началото на координатната система по положителната посока на абсцисната ос (фиг.2).



Фиг.2

На точката x_1 отговаря точката M_1 от графиката на функцията, а на нея стойността $y_1=f(x_1)$. Аналогично на x_2 отговаря $y_2=f(x_2)$, на x_3 отговаря $y_3=f(x_3)$ и т.н. От фигура 2 се вижда, че когато стойностите на аргумента x стават големи, съответните на тях стойности на функцията стават близки до нулата. Същият резултат получаваме и когато стойностите на x стават малки (приближават се към $-\infty$). Тези два факта записваме по следния начин:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 .$$

Нека функцията f е дефинирана в интервала $(a,+\infty)$.

!! ***Дефиниция 4.*** Казва се, че числото ℓ е граница на функцията f, когато x клони към $+\infty$, ако $f(x)$ се приближава до ℓ, когато x приема големи стойности (приближава се до $+\infty$).

Нека функцията f е дефинирана в интервала $(-\infty, b)$.

!! ***Дефиниция 5.*** Казва се, че числото ℓ е граница на функцията f, когато x клони към $-\infty$, ако $f(x)$ се приближава до ℓ, когато x приема малки стойности (приближава се до $-\infty$).

Използваме следните символи:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \ \text{ или } \ f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell \ \text{ или } \ f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}\ell .$$

Ако се върнем към графиките на основните елементарни функции и постъпим както с функцията $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ще получим следните важни граници:

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$;
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$, при $a>1$;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$, при $0<a<1$;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$;
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$;
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}x=0$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg}x=\pi$

Пример 5. Пресметнете границите:

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^3-2x+7}{2x^3+x^2-5x+1}$; **2.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x^2+x-2}{3x^4+2x^3-4x+1}$;

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; **4.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; **5.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$.

Решение: **1.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x^3-2x+7}{2x^3+x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3.\left(4-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}\right)}{x^3.\left(2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{4}{2}=2$, защото според пример 4 и правилата за пресмятане на граници

е изпълнено $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7}{x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}==\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$.

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x^2+x-2}{3x^4+2x^3-4x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2.\left(7+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^4.\left(3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2}.\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}=0.\dfrac{7}{3}=0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2}.\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{|x|.\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x.\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$, защото $|x|=x$ при $x>0$ и

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

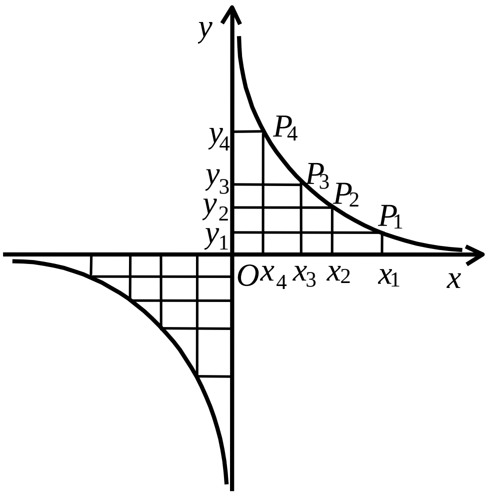
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{|x|.\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{(-x).\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}==-1$, защото

$|x|=-x$ при $x<0$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{|x|.\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\left[\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1\right]}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Пример 6. Да се изследва поведението на функцията $f(x)=\dfrac{1}{x}$, когато x се приближава към числото 0.



Фиг.3

Използваме отново графиката на функцията $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Нека x се приближава към нулата отдясно, т.е. с положителни стойности $x_1, x_2, \ldots$. Тогава както се вижда от фиг.3 съответните на тях функционални стойности:

$$y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ \ldots$$

се отдалечават от началото на координатната система по положителната посока на ординатната ос, т.е. стават произволно големи. Аналогично установяваме, че когато се приближаваме към нулата отляво, то стойностите на функцията стават произволно малки (приближават се към $-\infty$). Тези два факта записваме по следния начин:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=-\infty .$$

Нека функцията f е дефинирана в интервала (a,b) и $x_0\in(a,b)$.

!! ***Дефиниция 6.*** Казва се, че $+\infty$ е граница на функцията f, когато x клони към x_0, ако $f(x)$ се приближава към $+\infty$ (става произволно голямо), когато x се приближава до x_0.

!! ***Дефиниция 7.*** Казва се, че $-\infty$ е граница на функцията f, когато x клони към x_0, ако $f(x)$ се приближава към $-\infty$ (става произволно малко), когато x се приближава до x_0.

Означенията са съответно: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ или $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}+\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ или $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}-\infty$.

По подобен естествен начин се дефинират и следните граници:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty .$$

Ако отново се върнем към графиките на основните елементарни функции и постъпим както с функцията $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (от примери 4 и 6) ще получим следните важни граници:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, при $a>1$;
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$, при $0<a<1$;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x=+\infty$, при $a>1$;
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x=-\infty$, при $a>1$;
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x=-\infty$, при $0<a<1$;
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x=+\infty$, при $0<a<1$;
7. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg}x=+\infty$;
8. $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg}x=-\infty$;
9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \operatorname{cotg}x=-\infty$;
10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{cotg}x=+\infty$.

Правилата за намиране на граници от теорема 1 могат да бъдат обобщени и за случаите, когато $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$. Вместо да ги привеждаме ние ще въведем следните формални равенства, свързани с аритметичните действия с безкрайността:

1. $a+(+\infty)=+\infty$ и $a+(-\infty)=-\infty$ за всяко реално число a.
2. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ и $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$.
3. $a.(+\infty)=+\infty$ и $a.(-\infty)=-\infty$ за всяко число $a>0$.
   $a.(+\infty)=-\infty$ и $a.(-\infty)=+\infty$ за всяко число $a<0$.
4. $(+\infty).(+\infty)=+\infty$, $(-\infty).(-\infty)=+\infty$,
   $(+\infty).(-\infty)=-\infty$, $(-\infty).(+\infty)=-\infty$.
5. $\dfrac{a}{+0}=+\infty$ и $\dfrac{a}{-0}=-\infty$ за всяко число $a>0$,
   $\dfrac{a}{+0}=-\infty$ и $\dfrac{a}{-0}=+\infty$ за всяко число $a<0$.
6. $\dfrac{a}{+\infty}=\dfrac{a}{-\infty}=0$ за всяко реално число a.

Ето как се тълкуват тези равенства чрез граници. Например символът $a+(-\infty)=-\infty$ означава, че ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=-\infty$.

Символът $\dfrac{a}{+0}=-\infty$ при $a<0$ означава, че ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a<0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ и $g(x)$ приема положителни стойности , то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

Символът $\dfrac{a}{-\infty}=0$ означава, че ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Пример 7. Пресметнете границите:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x^3+6x^2-x+2)$;
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4-3x^2-5x+6)$;
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^5-2x^3-5x^2+7)$;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^3-5x^2+6x-1}{6x^2-8x+9}$;
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^4-2x^2+1}{x^2-5x+2}$;
6. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\dfrac{x-3}{x^2-4}$;
7. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x-2}{x^2-1}$;
8. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{5-x}{(x-5)^3}$.

Решение: **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x^3+6x^2-x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3.(-5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3})=$
$=(+\infty).(-5)=-\infty$, защото $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)==\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^3}=0$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4-3x^2-5x+6)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4.(2-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{6}{x^4})=(+\infty).2==+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^5-2x^3-5x^2+7)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5.(4-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{7}{x^5})=(-\infty).4==-\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^3-5x^2+6x-1}{6x^2-8x+9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3.\left(7-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2.\left(6-\dfrac{8}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x.\dfrac{7-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{6-\dfrac{8}{x}+\dfrac{9}{x^2}}=(+\infty).\dfrac{7}{6}=+\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^4-2x^2+1}{x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5.\left(2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{x^2.\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3.\dfrac{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}}{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=(-\infty).2=-\infty$.

6. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\dfrac{x-3}{x^2-4}=\dfrac{-1}{-0}=+\infty$, защото $\lim\limits_{x\to2}(x-3)=-1$ и $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}(x^2-4)=0$, като x^2-4 приема отрицателни стойности за $x<2$ и x близко до 2.

7. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x-2}{x^2-1}=\dfrac{-1}{+0}=-\infty$.

8. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{5-x}{(x-5)^3}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{-(x-5)}{(x-5)^3}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{-1}{(x-5)^2}=\dfrac{-1}{+0}=-\infty$.

От училищния курс по математика е известна важната роля на числото π. Друга фундаментална константа в математиката е числото на Непер. За функцията $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ може да се докаже, че има граница, когато x клони към $+\infty$. Точно тази граница се нарича число на Непер и се означава с буквата e:

$$e\overset{\text{деф.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Доказано е, че това число е ирационално, т.е. безкрайна десетична непериодична дроб. Например представянето на e с точност до шестия знак е следното $e=2{,}718281\ \ldots$.

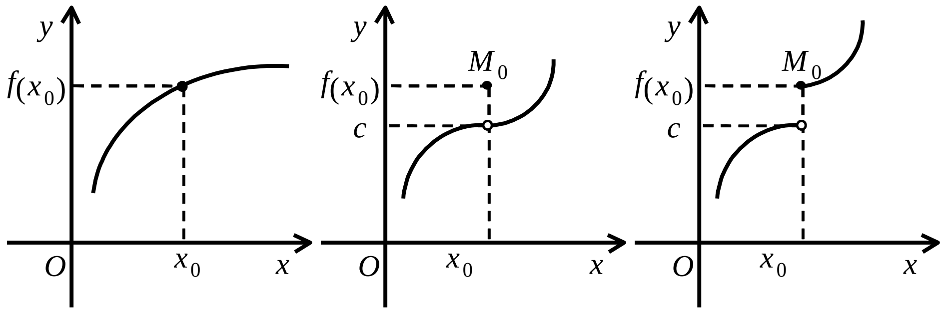
Логаритмите на положителните числа x при основа e се наричат естествени или натурални и се означават с $\ln x$, т.е. $\ln x\overset{\text{деф.}}{=}\log_e a$.

Показателната функция e^x се нарича експоненциална и играе основна роля в математиката. Ясно е, че функциите e^x и $\ln x$ са взаимно-обратни. Техните свойства са както свойствата съответно на показателната функция a^x и логаритмичната функция $\log_a x$, когато $a>1$.

Чрез граница може да се дефинира понятието непрекъснатост на функция в точка. Нека функцията f е дефинирана в интервал Δ и $x_0\in\Delta$.

!! ***Дефиниция 8.*** Казва се, че функцията f е непрекъсната в точката x_0, ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ако границата на функцията f, когато x клони към x_0 не съществува или тя съществува, но не е равна на $f(x_0)$, то ще казваме, че f е прекъсната в x_0.

В графичен смисъл, функцията f е непрекъсната в точката x_0, ако нейната графика не се къса в точката $M_0(x_0, f(x_0))$. Да разгледаме функциите, чийто графики са дадени на фигура 4.



а) б) в)

Фиг.4

В случай а) е изпълнено $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ и функцията е непрекъсната в x_0. В случай б) е изпълнено $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \neq f(x_0)$ и функцията е прекъсната в x_0. В случай в) е изпълнено $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = c \neq f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ въобще не съществува и функцията е прекъсната в x_0. Както виждаме в последните два случая е налице скъсване на графиката в точката M_0.

!! ***Дефиниция 9.*** Казва се, че функцията f е непрекъсната в интервала Δ, ако f е непрекъсната във всяка точка от този интервал.

Това означава, че графиката на функцията не се къса в никоя своя точка. С други думи може да се опише без да се вдига молива от листа.

Всички основни елементарни функции са непрекъснати в своите дефиниционни области.

От теорема 1 следват правилата за аритметични действия с непрекъснати функции.

!! ***Теорема 4.*** Ако функциите f и g са непрекъснати в x_0, то и функциите:

$$f+g\,; \quad f-g\,; \quad f\,.\,g\,; \quad \frac{f}{g}, \quad \text{при } g(x_0) \neq 0$$

са непрекъснати в точката x_0.

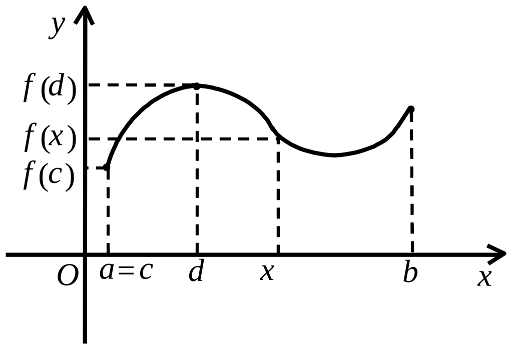
!! ***Теорема 5.*** Композицията на непрекъснати функции е също непрекъсната функция.

Сега вече, припомняйки си дефиницията на елементарна функция, можем да твърдим, че всяка елементарна функция е непрекъсната в дефиниционната си област.

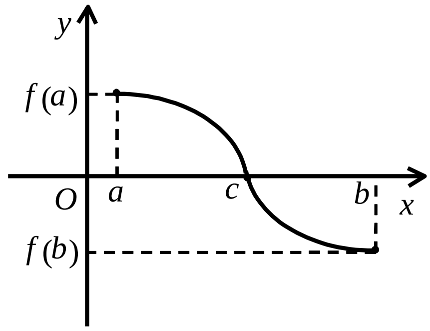
Доказателствата на следващите теореми също ще пропуснем като ще посочим само техните геометрични интерпретации. Тези твърдения дават някои съществени свойства на функциите, непрекъснати в затворен интервал.

!! ***Теорема 6.*** (*Вайерщрас*) Ако функцията f е непрекъсната в интервала $[a, b]$, тя има най-голяма стойност и най-малка стойност в $[a, b]$, т.е. съществуват точки c и d от $[a, b]$ такива, че $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ за всяко $x \in [a, b]$.

На фиг.5 е дадена графиката на една функция, която е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Както се вижда има поне една точка върху графиката на функцията, която е разположена най-високо и поне една точка, която е разположена най-ниско. Именно тези точки отговарят съответно на най-голямата и най-малката стойности на функцията.



Фиг.5



Фиг.6

Най-голямата стойност и най-малката стойности на една функция се наричат още глобални (абсолютни) екстремуми на функцията. Да отбележим, че те могат да се достигат или във вътрешна точка на интервала, или в някой от неговите краища.

! ! ***Теорема 7.*** (*Болцано*) Нека функцията f е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и в краищата му приема стойности с различни знаци (т.е. $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$ или $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$). Тогава съществува точка $c \in (a, b)$, за която $f(c) = 0$.

На фиг.6 е изобразена графиката на една функция f, която приема стойности $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$. Както се вижда графиката (заради непрекъснатостта) пресича абсцисната ос Ox в поне една точка c. Именно в тази точка е изпълнено $f(c) = 0$.

! ***Задачи за самостоятелна работа***

1. Пресметнете границите:

а) $\lim\limits_{x \to -1} (4x^5 - 2x^4 + x^3 - 7)$; б) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5 - x}{x - 6}$;

в) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 4x + 2}{5x^2 - 3x - 1}$; г) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{4 - 5x + 3x^2 - x^4}$;

д) $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 4}{t^2 + t - 6}$; е) $\lim\limits_{y \to 1} \dfrac{y^2 - y}{y^2 - 1}$;

ж) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{5 + x} - 1}{x + 4}$; з) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$.

2. Пресметнете границите:

а) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^4 - 3x^3 + 2x - 9}{-3x^4 + 2x^3 - x + 4}$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{6x^4 + 2x^3 - x^2 - 5}$;

в) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3}{\sqrt{1 - x^2 + 2x^4}}$; г) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right)$;

д) $\lim\limits_{x \to -\infty} (7x^5 + 2x^3 - x + 4)$; е) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x^6 - 5x^4 - 3x^3 + x^2 - 5}{5x^4 - 8x^3 + x + 3}$;

ж) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^3 + x^2 - 6}{x^2 + 5x - 1}$; з) $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \dfrac{x + 4}{9 - x^2}$.